

TESIS CARRERA DE DOCTORADO EN FÍSICA

**CARACTERIZACIÓN DE PROPIEDADES
EMERGENTES EN SISTEMAS SOCIALES**

Andrés Chacoma
Doctorando

Marcelo N. Kuperman
Director

Miembros del Jurado
Dr. Pablo Gleiser (Instituto Balseiro)
Dr. Pablo Balenzuela (Universidad de Buenos Aires)
Dr. Alejandro Kolton (Instituto Balseiro)

25 de Abril de 2017

Física Estadística e Interdisciplinaria – Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

“No es la conciencia del hombre la que
determina su ser, sino, por el contrario,
es su ser social el que determina su conciencia”.

Karl Marx,
Contribución a la crítica de la economía política, 1859.

A Oscar Cervantes in memoriam.

Índice de contenidos

Índice de contenidos	v
Resumen	vii
Abstract	ix
1. Introducción	1
1.1. El estudio del hombre y la sociedad. Las ideas de los científicos sociales a lo largo del tiempo	1
1.2. Estudios sociales cuantitativos	5
1.3. El enfoque de las ciencias duras en el estudio del comportamiento humano	9
1.4. Objetivos y estructura de la tesis	11
2. Conceptos teóricos básicos	17
2.1. El modelo del votante	17
2.2. Elementos de sistemas dinámicos	18
2.3. Elementos de teoría de juegos	19
2.3.1. La batalla de los sexos:	20
2.3.2. La dinámica del replicador:	21
2.4. Elementos de Redes complejas	21
2.4.1. Parámetros topológicos	22
3. Propagación de disenso en un modelo de formación de opinión	27
3.1. Grupos de dos agentes en una cadena unidimensional	29
3.2. Grupos más grandes en una red cuadrada	34
3.3. Conclusiones	40
4. Formación de opinión guiada por influencia social: De un experimento al modelado	45
4.1. Descripción del experimento	47
4.2. Acerca del procesamiento de los datos	48
4.3. Resultados del experimento	50

4.4. Modelo teórico	54
4.5. Resultados analíticos y teóricos	55
4.6. Discusión y conclusiones	60
4.7. Apéndice 1: Lista de preguntas utilizadas en el experimento	63
4.8. Apéndice 2: Distribución de respuestas en la primer ronda	64
4.9. Apéndice 3: Aproximación analítica a la evolución de opiniones	66
5. Juegos evolutivos con payoff no monotónico. Una variación de la batalla de los sexos	73
5.1. El juego	75
5.2. Resultados numéricos y el efecto de la imitación	78
5.3. Enfoque analítico	81
5.4. Conclusiones	84
6. Efectos de la topología de red en la pérdida de información de un sistema de transmisión con probabilidad de error	89
6.1. Acerca del modelado de los errores de transmisión	90
6.2. Dinámica de transmisión	91
6.3. Implementación de la dinámica	93
6.4. Resultados	94
6.4.1. Redes Small World Regulares	94
6.4.2. Redes tipo Small World	100
6.4.3. Redes libres de escala	103
6.5. Conclusiones	107
7. Tránsito vehicular: Fenómeno crítico inducido por un semáforo	115
7.1. El modelo	116
7.2. Resultados	118
7.3. Discusión	122
7.4. Conclusiones	126
8. Conclusiones generales y perspectivas a futuro	133
Agradecimientos	137

Resumen

En esta tesis presentamos un estudio de las propiedades emergentes de sistemas complejos cuyas interacciones tienen origen en el comportamiento humano y en dinámicas sociales. Para ello encaramos los problemas con un enfoque interdisciplinario, utilizando métodos derivados de la física estadística, la matemática y conceptos básicos de la sociología y teoría del comportamiento. Los cinco capítulos principales de este trabajo (del 3 al 7), se resumen en las líneas siguientes.

En el tercer capítulo consideramos una clase de modelo de formación de opinión donde la diseminación de las opiniones individuales se produce a través de la difusión de consenso y disenso local. En este contexto, estudiamos la aparición de un consenso colectivo total o un disenso máximo en arreglos unidimensionales y bidimensionales. Observamos que en ambos casos, la probabilidad de alcanzar un consenso total exhibe propiedades de escala bien definidas en función del tamaño del sistema. En particular, los sistemas bidimensionales, mostraron exponentes no triviales y puntos críticos.

El interés por la dinámica de formación de opinión nos llevó a encarar el experimento social que contamos en el capítulo cuatro, este experimento tiene como objeto cuantificar el cambio de opiniones de un sujeto sobre un conjunto de asuntos específicos, bajo la influencia de las opiniones de los demás. Registramos las respuestas cuantitativas de 85 sujetos a 20 preguntas antes y después de un evento de influencia, donde hicimos hincapié en caracterizar los cambios en respuestas y confianzas inducidas por tal influencia. Encontramos que los cambios de confianza son en gran medida independientes de cualquier otra cantidad registrada, mientras que los cambios de opinión se observaron muy relacionados a la confianza del sujeto. Los resultados experimentales se utilizaron para proponer las interacciones sociales en un modelo de formación de opinión basado en agentes. En el contexto de este modelo, estudiamos la convergencia al pleno consenso y el efecto de líderes de opinión sobre la distribución colectiva de opiniones.

En el quinto capítulo proponemos un juego evolutivo de coordinación para formalizar un modelo simplificado de la evolución de las estrategias durante el cortejo humano. La dinámica, derivada de la consideración de observaciones experimentales sobre el comportamiento social humano, el cual muchas veces es impulsado por la confianza en sí mismo y la imitación social, resulta no ser monótona. Esta propiedad da

lugar a una evolución no trivial en las estrategias de los jugadores, que estudiamos tanto numéricamente como analíticamente.

Abordamos en el sexto capítulo un problema de propagación de información sobre redes complejas, centrando nuestro interés en estudiar el efecto de posibles fallas. En la dinámica que proponemos, en una red de N nodos se reparten $10N$ paquetes de información con el siguiente contenido: (1) La dirección de destino, y (2) un mensaje a transmitir. Los nodos de esta red tienen la capacidad de recibir y transmitir paquetes de información, los cuales se propagan en la red con una estrategia simple: un nodo que quiere transmitir un paquete se fija si la dirección de destino es la de alguno de sus vecinos, si es así se lo envía, y si no lo envía a algunos de sus vecinos al azar. Proponemos que los nodos tienen una probabilidad de transmitir información errónea y modelamos dos tipos de errores posibles que pueden ser asociados a errores del tipo humano en la administración de información. En este contexto, manteniendo la probabilidad de error fijo, nos enfocamos en estudiar el efecto que las diferentes topologías de red producen en la pérdida de información global del sistema.

En el contexto de los estudios de comportamiento, es sabido que el accionar de los conductores de vehículos en los sistemas de tránsito es clave para entender las grandes congestiones de tránsito. Abordamos este tema en el capítulo séptimo, donde nos proponemos modelar el efecto de la colocación de un semáforo en una vía unidimensional donde los autos fluyen con condiciones de contorno abiertas en los extremos. En este entorno, el semáforo produce una perturbación que se ve magnificada por la actitud de los conductores, las cuales las consideramos como: (1) mantener una velocidad prudente y (2) mantener una distancia prudencial entre autos. En base a esto, hicimos un estudio del efecto de los tiempos característicos del semáforo sobre la densidad del tránsito, observando una transición de fase abrupta entre estados de tránsito congestionados y no congestionados. Además observamos una dependencia de esta transición respecto al flujo de autos a la entrada de la calle, a partir de la cual obtuvimos un diagrama de fases para el sistema, el cuál consideramos que podría ser utilizado como un soporte teórico para el desarrollo tecnológico de luces de control más inteligentes.

Abstract

In this thesis we present a study of emergent properties of complex system inspired by human behavior and social dynamics.

In our interdisciplinary approach to the problem we recur to methods derived from statistical physics, mathematic and basic concepts from sociology and behavior theory. The content of the five main chapters (3 to 7) presented in this work are summarized as follow.

On chapter 3, we consider a model of opinion formation where the dissemination of individual opinions occurs through the spreading of local consensus and disagreement. We study the emergence of full collective consensus or maximal disagreement in one- and two-dimensional arrays. In both cases, the probability of reaching full consensus exhibits well-defined scaling properties as a function of the system size. Two-dimensional systems, in particular, exhibit non-trivial exponents and critical points.

Our interest for opinion formation dynamics, have lead us to set up the social experiment we show on the fourth chapter. There we present the results of an experiment which quantifies the change in the opinions adopted by a subject about a set of specific matters under the influence of others. We record the quantitative answers of 85 subjects to 20 questions before and after an influence event, the focus is put on characterizing the change in answers and confidence induced by such influence. We find that confidence changes are to a large extent independent of any other recorded quantity, while opinion changes are strongly modulated by the original confidence. Experimental results are then used to estimate parameters for a dynamical agent-based model of opinion formation in a large population. In the context of the model, we study the convergence to full consensus and the effect of opinion leaders on the collective distribution of opinions.

On chapter five we propose an evolutionary coordination game to formalize a simplified model of the evolution of strategies during human courtship. The dynamics, derived from the consideration of experimental observations on human social behavior driven by self-confidence, turns out to be non-payoff monotonic. This property gives rise to non-trivial evolution in the players' strategies, which we study both numerically and analytically.

On chapter sixth we tackle a problem of information propagation over complex

networks. In this context we focus on study the effect of possibles failures during the propagating process. We propose a dynamics where, in a N - nodes network, we distribute $10N$ information packages with two contents (1) the destination address, and (2) a message to transmit. The network nodes are able to receive and transmit packages, which propagate through the network with a simple strategy: a node who wants to transmit a package, looks if the destination address are in its neighborhood, if true, it sends it to that node; if false, it sends it to a any neighbor chosen at random. We include a probability associated to transmit wrong information, and we model two possibles type of errors that could be associated with some kind of human errors in the administration of information. In this context, keeping a fixed error probability, we focus in study the effect that different network topologies produce on the global lost of information in the whole system.

Within the context of behavioral studies, we analyze the case of a system of drivers, whose behavior analysis is the key to understand the emergence of transit jams. We address this topic on chapter seventh, where we propose to model the effect of installing traffic lights into a one-dimensional highway with open border conditions traversed by cars. In this system, traffic lights produce a perturbation that fed back with the drivers attitude can lead to different scenarios. The driver behavior can be (1) keep a prudent velocity, and (2) keep a prudent distance between cars. On this bases we study the effect the characteristic times associated to the functioning of of traffic lights over the cars density on the highway. We observe an abrupt phase transition among free way-states and jam-states Moreover, we observe a dependence on the cars flux at the start of the way, from which we obtained a phase diagram for the system, that might be a technical support for developing intelligent traffic lights.

Capítulo 1

Introducción

El estudio de los procesos dinámicos que subyacen y gobiernan los fenómenos sociales es (y ha sido) un tema de mucho interés para la comunidad científica. La notable complejidad asociada a la comprensión y el análisis de dichos fenómenos, ha llevado a los pensadores a esbozar diferentes y múltiples enfoques.

El objetivo de esta introducción es describir y discutir el marco contextual en el que se insertan los estudios que dan cuerpo a esta tesis. Los sistemas estudiados están principalmente inspirados en procesos de dinámica social mientras que el formalismo utilizado se basa en herramientas provenientes de la física estadística, la teoría de grafos y la teoría de juegos.

Comenzaremos por poner en contexto el enfoque que pretende dar este trabajo al estudio de los sistemas sociales, desde la perspectiva de la física estadística y los sistemas complejos. Para eso expondremos la evolución histórica de los conceptos asociados, desarrollados principalmente por la filosofía, la sociología y la psicología social y experimental. Junto con ello describiremos el surgimiento de nuevas ideas matemáticas que actualmente hacen posible establecer los vínculos interdisciplinarios adecuados.

1.1. El estudio del hombre y la sociedad. Las ideas de los científicos sociales a lo largo del tiempo

Comenzaremos por mostrar como evolucionó la idea de individuo y sociedad a lo largo de la historia. El ser humano es un ser social y la historia ha demostrado la relevancia que los procesos sociales tienen en la vida de cada uno de los individuos que forman nuestra sociedad. Los antiguos pensadores griegos presocráticos, padres de la filosofía occidental, introdujeron la discusión sobre el hombre y la sociedad en el siglo VI a.C. generando los primeros debates acerca de la moral con el objetivo de distinguir una acción correcta de otra incorrecta [1]. En el período antropológico (siglo IV a.C.), la escuela sofista se centró en el estudio de la ética, la política, las

leyes y las normas de la sociedad. La figura de Sócrates en el mismo período, aportó la interesante idea de subjetividad, que limita la validez de la verdad al sujeto que conoce y que juzga principalmente por su propio entendimiento y considerando su realidad específica (entorno e interacción social) no como un hecho externo sino más bien como parte constitutiva del sujeto. El sujeto es el sujeto más su entorno [2].

Estas ideas resonaron años más tarde en los conceptos sociales y políticos que Platón intentó plasmar en su obra más renombrada: “La república”. En ésta obra, el filósofo explica los componentes de la sociedad con una analogía de las partes que, para su escuela, definían al hombre. Para eso propone dividir la la sociedad en clases: Filósofos, Guardianes y Trabajadores. A partir de esta división define roles para cada uno de los individuos de la sociedad con el fin de establecer las reglas de una dinámica de clases que sea funcional a una aristocracia o una monarquía, lo que él mismo consideraba “un estado ideal”. Su trabajo es una clara crítica a la democracia impuesta por Pericles y otros en el siglo V a.C., pero además es una interesante construcción teórica acerca el hombre, la sociedad y las fuerzas que subyacen la dinámica social [3].

En la misma línea que Platón, su discípulo Aristóteles analiza en su obra “La Política” el rol de las instituciones sociales en la relación emergente entre las masas y la elite gobernante. Con un enfoque más naturalista, define a la familia como el núcleo mínimo de las sociedades, y a ésta como una prolongación natural de la familia. Plantea la idea de hombre como un animal político, siendo el primer pensador capaz de discernir claramente entre sociedad y estado [4].

En la edad media , en un contexto teocéntrico, las figuras de San Agustín, Santo Tomás de Aquino y Juan Bodio establecen un marco sociológico central para el sistema social de los estados feudales. También en esa época nace la encuesta como herramienta para obtener información acerca de los individuos. Esta idea es incluida en el “Libro Domesday” (o Libro de Winchester) completado por orden del rey Guillermo I de Inglaterra en el año 1086 [5].

Dos obras de esta época se destacan por encima del resto. La primera de ellas pertenece al historiador (y filósofo, sociólogo, estadista, etc) musulmán Ibn Jaldún (o Abenjaldun), quien en los siete volúmenes de su obra “Muqaddima” (o Prolegómenos), desarrolla un extenso ensayo acerca de la historia universal del hombre. Entre sus contribuciones se destacan las primeras teorías sociológicas sobre el conflicto social y la cohesión social. Realiza los primeros intentos por definir una dinámica de mercados, analizando los conceptos fundamentales de precio y formación de capital [7]. La segunda obra, aparecida ya sobre el comienzo del Renacimiento es “El Príncipe” de Nicolas Maquiavelo, quien a diferencia de las ideas de Platón, no intenta discutir acerca del mejor estado posible, si no más bien describir las cualidades que debería tener un gobernante y como debía comportarse para conquistar poder en la sociedad, mantenerlo o ampliarlo; muchas veces usando tácticas de dudosa o escasa moral [6].

Aquí, el individualismo como motor vital es expuesto de manera explícita.

En la época de la ilustración, dentro del paradigma de la razón, los pensadores sociales comienzan a hacer hincapié en los derechos individuales y a analizar la relación entre los individuos y el estado. Una de las obras más importantes de la época, pertenece a Tomás Hobbes, quien en su libro “Leviatan” establece, como base de las sociedades y de los gobiernos legítimos, una doctrina de derecho moderno [8].

Por otro lado, inspirado por las ideas liberales de John Locke y en base a los ensayos de Hobbes, Jean-Jacques Rousseau publica en 1762 el primero de los cuatro volúmenes de “El contrato social”, obra que trata principalmente acerca de la libertad e igualdad de los hombres dentro de un estado instituido por un contrato social, sembrando allí las primeras ideas del estado de derecho y los fundamentos de la filosofía política socialista [9].

Al igual que Rousseau, otros pensadores ilustres como François-Marie Arouet (Voltaire) y Charles Louis de Secondat (Montesquieu), actores principales de la revolución francesa, se manifiestan siguiendo la misma línea filosófica de Locke, en particular en lo que refiere a la división de poderes en el estado. Si bien tanto Rousseau como Voltaire abogaban por los ideales de libertad, igualdad y fraternidad, es interesante (y tal vez inevitable) remarcar que ambos pensadores tenían ideas absolutamente antagónicas acerca de la naturaleza del hombre y del efecto de la sociedad en su desenvolvimiento. Por un lado Rousseau creía que el hombre llegaba a la tierra en estado puro y la sociedad lo corrompía sacándolo de su estado natural. Y por el otro, Voltaire creía que el hombre nacía en un estado salvaje y solo la sociedad a través de la educación podía encaminarlo por la senda de la razón.

Siguiendo con los pensadores del siglo de las luces, la ilustración escocesa se embandera en las ideas de Henry Home (Lord Kames). Ferviente defensor de la propiedad privada, en sus obras “Historical Law Tracts” y “Sketches on the History of Man”, Kames explica el surgimiento de los sistemas legales en el mundo, realizando un estudio del desarrollo de las sociedades humanas. Del mismo modo, el pensador dedica algunos ensayos a hacer un análisis de las causas del cambio y la estabilidad social. Estas ideas nutrieron a los pensadores contra revolucionarios liderados por Joseph de Maistre y Edmund Burke, quienes con una visión muy conservadora y preocupados por el estallido social inminente asociado al cambio de paradigma de la revolución burguesa, dedican un análisis de la estabilidad social [10].

En el siglo XIX una corriente filosófica propone que el conocimiento genuino es el conocimiento científico, el cual solo puede surgir de las afirmaciones que se deducen de las hipótesis a través del método científico. Esta corriente, conocida con el nombre de Positivismo, surge como manera de legitimar el conocimiento emergente de la filosofía natural. Los pensadores sociales no quedan ajenos a estas ideas, y de la mano de Henri de Saint-Simon y Auguste Comte, comienzan a desarrollar sus teorías dentro de esta

corriente. Estos pensadores expresan la voluntad de crear una “física social”, es decir un conocimiento indiscutible de la sociedad análogo a como se establece en la física [11]. Entre sus ideas, Comte propone que dado que toda vida humana pasa a través de diferentes etapas históricas, la comprensión de estos procesos podrían definir soluciones para muchos problemas sociales. La respuesta, se postula, está en la historia. Al mismo tiempo propuso que la sociología debía quedar libre de toda relación con la filosofía y que debía basarse en datos empíricos para la comprensión de los fenómenos sociales, de la estructura y del cambio social, razón por lo cual se lo considera en la actualidad como el padre de la sociología como disciplina científica. Afirmaba que la sociología era la ciencia madre, en el sentido de que todas las otras ciencias naturales quedaban subordinadas a ésta, ya que el objetivo de las ciencias es proporcionar herramientas para el crecimiento de la sociedad. De manera paralela, las ideas económicas avanzan en la visión de un individuo económico de comportamiento puramente racional. A partir de las ideas del economista J. S. Mills en sus escritos sobre economía política se define el concepto de Homo economicus [12], que supone un modelo de Homo sapiens cuyas acciones tienden a alcanzar el mayor bienestar posible a partir de la información disponible sobre oportunidades y restricciones. El Homo economicus es un individuo racional que trata de alcanzar la mayor cantidad de los objetivos que se ha planteado con el menor costo posible. Los aspectos éticos y el compromiso social en este paradigma se dejan de lado.

Es conocido el párrafo del libro “On the Definition of Political Economy, and on the Method of Investigation Proper to It” [13], que dice: *“La economía política no trata la totalidad de la naturaleza del hombre, modificada por el estado social, ni de toda la conducta del hombre en sociedad. Se refiere a él sólo como un ser que desea poseer riqueza, y que es capaz de comparar la eficacia de los medios para la obtención de ese fin”*

Basados en el concepto de homo economicus aparecieron los primeros modelos matemáticos elaborados por Francis Edgeworth, Léon Walras y Wilfredo Pareto [14]. Muchos de los conceptos desarrollados en esa época, sobre todo por Pareto, siguen vigentes en las teorías económicas actuales. Leon Walras, por otro lado, sentó las bases de la economía matemática [15].

La economía surgía como una nueva disciplina que desplegaba el escenario en el cual las teorías sociales y las matemáticas se enlazaban. Su rol en la sociedad y el estado comenzaba a ser discutido por diversas corrientes filosóficas. Una de ellas fue la corriente materialista desarrollada por Karl Marx y Friedrich Engels a mediados del siglo XIX. La corriente materialista supone la afirmación de que el hombre, como protagonista de la historia, establece con la naturaleza y con los otros hombres relaciones materiales; los hombres toman los recursos de la naturaleza para producir e intercambiar bienes materiales para satisfacer sus necesidades. Marx llama a esto producción social de la

vida, y propone que estas relaciones dan origen a la ideología y la estructura jurídico-política del estado. Por lo tanto se trata de un materialismo dialéctico e histórico, que define las relaciones económicas de producción. Marx propone que lo que condiciona la historia humana son estas relaciones de producción, ya que el modo de producción de la vida material, condiciona el proceso de la vida social, política y espiritual. Considera también a la historia humana como un proceso de maduración que se lleva a cabo a partir de la lucha de clases. Y plantea que a partir de esta lucha, el hombre se encamina hacia una sociedad sin clases [17]. En este punto se encuentra con las ideas positivistas de Comte y Saint-Simon, que igualmente creían que la sociedad algún día alcanzaría el fin de ese proceso de maduración en el socialismo utópico.

El origen de la sociología académica se asocia a la creación del primer departamento europeo de sociología, en la Universidad de Bordeaux en 1895 de la mano de Émile Durkheim. En ese mismo año, Durkheim publica su obra “Las reglas del método sociológico”, en la cual distingue a la sociología de otras ciencias justificando su razón de ser. Propone que la sociología es la ciencia que tiene como objeto específico de estudio a los hechos sociales y que para su estudio se debe aplicar un método objetivo científico reconocido, que sea lo más próximo posible a las ciencias exactas y evitando a toda costa los prejuicios y juicios subjetivos.

Su línea de pensamiento va en la dirección de una renovación del positivismo, el argumento de Durkheim de que las ciencias sociales deben ser abordadas con el mismo método científico riguroso que usa las ciencias naturales, fue considerado revolucionario para la época y su significado todavía es objeto de debate entre los sociólogos [18].

Hasta aquí se ha hecho una breve reseña acerca de la evolución de las ideas en torno al hombre como ser social, su rol en la construcción de la sociedad y como estas ideas desembocaron en el desarrollo de la sociología moderna. En la próxima sección describiremos el avance de la sociología y la psicología cuantitativa, las cuales resultan a nuestros objetivos muy importantes, ya que crearon las condiciones necesarias para avanzar en la formulación matemática de modelos que describen los procesos sociales.

1.2. Estudios sociales cuantitativos

El complejo proceso de interacción entre hombre y sociedad puede ser planteado a partir del estudio de los hechos sociales observando la historia, como bien hace la sociología; o a través del estudio del individuo como unidad mínima constitutiva de la sociedad y su relación consigo mismo y con otros individuos, como lo plantea la psicología.

Las teorías de la personalidad intentan describir aquellos factores que en su conjunto hacen al individuo, con el fin de comprender su conducta e intentar predecirla. En la actualidad no existe una ley universal que explique todos los tipos de conducta, pero

éste tema está en constante investigación por la psicología.

Las bases del estudio de la personalidad fueron sentadas por Sigmund Freud a comienzos del siglo XX cuando planteó una teoría acerca de la estructura de la psique, de su funcionamiento y de la conducta humana [19].

Según la teoría de Freud, el deseo sexual (libido), el instinto de supervivencia (pulsación de Eros) y el instinto de agresividad (pulsación de Thanatos), son aquellas consideraciones básicas que se deben tener en cuenta para entender lo que moviliza a la mente. Estos instintos naturales son, según el pensador y dentro de un enfoque naturalista, aquello que permitió la supervivencia y el desarrollo de la especie desde los primeros tiempos del hombre.

Freud planteó que la satisfacción de una necesidad movilizada por estos instintos es lo que da origen al placer y observó también que en ciertos contextos sociales el hombre se ve inhibido de usar este mecanismo, lo cual lo llevó a definir el principio de realidad. Por ejemplo, si alguien quiere complacer sus deseos sexuales, la sociedad impone normas éticas, morales y legales a la cual esa persona debe atenerse. La realidad es eso donde el sujeto se desenvuelve y que pone límites a la satisfacción de estos instintos.

La psicología social [20] toma los estudios sobre la psicología individual como base para postular que existen procesos psicológicos independientes y observables, que están en un nivel diferente al de los procesos psicológicos del individuo, pero que son de la misma naturaleza. Esto le permite interpretar los comportamientos grupales, estudiar las actitudes de las personas y su forma de reaccionar o pensar en un medio social.

La observación y el estudio de estos procesos psicológicos, ha dado lugar a muchas conjeturas y teorías. No es la idea de este escrito hacer un recuento de todas ellas, sin embargo hay algunos conceptos que fueron relevantes para esta tesis y que se discutirán a continuación. Entre ellos están las ideas de autoconcepto, cognición social y los fenómenos, observados a partir de experimentos psicológicos, de presión e influencia social, conformidad y obediencia.

El autoconcepto o autoconfianza se define como el conjunto de las ideas, hipótesis y creencias que los individuos tienen de si mismo. Se va formando a partir de la experiencia y de la imagen percibida y proyectada en los otros y en la sociedad. Tiene su propia jerarquía de valores y es en sí dinámico, es decir cambia continuamente con reinterpretaciones de la personalidad y juicios externos, lo cual lo hace sensible a las opiniones de las demás personas influyendo directamente sobre el accionar del *Yo*. Es un parámetro que puede ser medido a través del uso de “tests” y cuyos niveles tienen correlación con psicopatías, enfermedades, y con la forma en la cual las personas establecen relaciones con su entorno [21–23].

Por otro lado, se llama cognición social a el modo en como un individuo percibe a los demás. Se cree que la complejidad de la realidad lleva a los individuos a crear esquemas simplificados (estereotipos), los cuales a menudo operan de manera automática y

pueden llegar a alterar, de manera no intencional, al preconciente, produciendo errores en la percepción o en la memoria. Estas expectativas esquemáticas pueden hacer que un individuo perciba algo que no existe, lo cual en algunos casos, redundando en actitudes prejuiciosas o discriminatorias.

A principios de los años '50, el psicólogo Salomon Asch dirigió en la Universidad de Swarthmore (Pennsylvania, EE. UU.) el primer experimento psicológico orientado a estudiar el efecto de la presión social sobre los individuos [24, 26].

Asch y sus colaboradores iniciaron una búsqueda de voluntarios a los cuales invitaban a participar de una prueba de visión. Dicha prueba era muy simple, consistía en observar dos dibujos, el primero de ellos tenía dibujada una línea vertical de un cierto largo, el segundo tenía dibujado tres líneas verticales de distinto largo. A partir de esto se les pedía a los participantes que dijese, según su propio juicio, cual de las tres líneas del segundo dibujo tenía el mismo largo que la línea del primer dibujo.

El experimento involucraba a siete participantes que debían comunicar en orden, uno después de otro, su percepción acerca del largo de la línea. Lo cierto es que en realidad no se trataba de un experimento de visión sino de influencia social. Seis de las siete personas que participaban de la experiencia eran colaboradores de Asch. El sujeto en estudio era el último en participar y en emitir su opinión. Así, en algunas rondas (no todas por que si no resultaba sospechoso) los seis colaboradores confabulaban para dar una respuesta claramente errónea, con el fin de influir en la respuesta del voluntario.

Lo que se observó fue que el 37% de los sujetos estudiados, tomaba la opción de la mayoría a pesar de ser muchas veces claramente errónea. También se verificó que cuando no estaban expuestos a la opinión de la mayoría, es decir cuando no había confabulación, los sujetos no tenían problemas en dar la respuesta correcta. Por otro lado también fue interesante que los participantes atribuían sus errores a su mala vista, negando el efecto de la presión social [25].

En la misma línea, en la década del '60 Stanley Milgram realizó un experimento similar que hoy en día se considera un clásico entre los estudios del comportamiento humano [26]. El psicólogo se preguntaba que había llevado a los soldados alemanes a ejecutar las órdenes aberrantes del alto mando de la dirigencia nazi, en su intento por terminar con las razas que ellos consideraban inferiores. Para intentar dar respuesta a esto, Milgram y sus colaboradores de la universidad de Yale diseñaron un experimento psicológico basado en lo siguiente: a través de un aviso se invitaba a las personas a participar de un estudio de la memoria y del aprendizaje. Sin embargo lo que en realidad se quería estudiar era el fenómeno de obediencia. Estudiarlo correctamente requería ocultar el verdadero objetivo. Los voluntarios eran personas de entre 20 y 50 años en un rango amplio de nivel educacional. El experimento en si requería de tres personas en los roles del investigador, el maestro y el aprendiz. La idea era que el maestro le daba al aprendiz una lista de palabras para aprender y si este último

cometía un error, el maestro debía castigarlo con una descarga eléctrica. El papel del investigador era simplemente observar el procedimiento.

Dos de estas personas eran colaboradores de Milgram y cumplían los roles de investigador y aprendiz, dejando el rol de maestro para el sujeto en estudio. Cuando llegaba el voluntario se realizaba una breve reunión de la cual participaban además el investigador y el falso voluntario (que como ya se aclaró también era colaborador de Milgram) y se explicaba el desarrollo del experimento. Para ser más creíble el asunto, el investigador hacía un supuesto sorteo en el cual se asignaban los roles, pero lo cierto es que al sujeto en estudio siempre le tocaba el rol de maestro. Luego el investigador hacía que el maestro verificase sobre sí mismo el efecto que causaba la descarga eléctrica que servía como castigo con el fin de que compruebe la sensación desagradable que el mismo debería ser capaz de provocar. Se le informaba que esas descargas irían creciendo en función de la cantidad de errores del aprendiz. Lo cierto es que esto también era parte de la simulación, el maestro en realidad no impartiría descarga alguna aunque él pensara que sí.

Hecho esto, se separaba al aprendiz y al maestro en dos habitaciones distintas, quedándose el investigador en la habitación del maestro y se procedía con el experimento. A medida que los errores del aprendiz se sucedían y las descargas eléctricas aumentaban, se hacía escuchar una grabación desde la otra habitación que emulaba al aprendiz con quejas y súplicas del estilo: “No soporto más!, quiero que esto termine” o “soy enfermo del corazón por favor paren”. Si el maestro, es decir el sujeto en estudio, dudaba de lo que estaba haciendo y consultaba al investigador este solo tenía permitido contestar: “Continúe por favor”, “Es necesario que usted continúe.” o “El experimento requiere que usted continúe”. Si el sujeto se negaba a seguir, el experimento se detenía.

Lo cierto es que en el experimento original, el 65 % de los participantes siguieron hasta al final y aplicaron la (supuesta) descarga máxima, algunos sintiéndose muy incómodos y otros no tanto. Los resultados [27] fueron muy sorprendentes para Milgram y su equipo, quienes habían predicho informalmente que ningún participante se atrevería a dar la descarga máxima. Esto lo llevó a desarrollar dos teorías, la primera de ellas es la teoría del conformismo, que asevera que si un sujeto no tiene la habilidad ni el conocimiento para tomar decisiones transferirá la responsabilidad al grupo y a su jerarquía, transformando al grupo en el modelo de comportamiento de la persona. La segunda fue la teoría de la cosificación, donde la persona se mira a sí misma como el instrumento que realiza los deseos de otra persona para evitar sentirse responsable de sus actos y evadir los conflictos personales. Cuando esta transformación ocurre en el individuo, todas las características de la obediencia se manifiestan.

En esta misma línea, la teoría conductual de juegos [28] ha dedicado sus esfuerzos a estudiar distintas estrategias de comportamiento a través de la realización experimental de juegos [29–31]. La literatura en esta área muestra una gran variedad de contextos en

donde los participantes tienden a elegir las estrategias dominantes, como por ejemplo cooperar en el caso del dilema del prisionero [30]. Las explicaciones de este tipo de fenómenos tiene varias aristas, en algunos contextos se plantean sesgos cognitivos y en otros del tipo motivacional. En el primer caso se destaca el estudio de Camerer et al [33] quien atribuye ciertas tendencias a limitaciones cognitivas, es decir a la capacidad limitada de algunos individuos de seguir pasos de razonamiento. En el segundo caso, se ha postulado que los individuos eligen sus estrategias siguiendo algún incentivo o motivación. Un ejemplo de esto son los estudios de Fehr y Fischbacher [34] quienes, para explicar ciertas tendencias hacia estrategias dominantes, utilizan conceptos sociales como cooperación, reciprocidad y altruismo.

La psicología experimental ha nutrido con evidencia empírica el estudio del comportamiento y puesto a la luz de la ciencia algunos mecanismos que han dado pie a la posibilidad del modelado de estos fenómenos. En el apartado siguiente se discute acerca de esta posibilidad y de como esto ha llevado a la aparición de una novedosa línea de investigación en la física de los sistemas complejos.

1.3. El enfoque de las ciencias duras en el estudio del comportamiento humano

Las ciencias sociales y las ciencias exactas evolucionaron siguiendo caminos diferentes, con metodologías y enfoques distintos. Del mismo modo que el desarrollo de las ciencias sociales puso en evidencia la necesidad de estudios cuantitativos, los conceptos asociados a las ciencias duras evolucionaron desde concepciones puramente mecanicistas y reduccionistas hacia las ideas asociadas a los sistemas complejos.

En este contexto, la aparición de nuevos formalismos matemáticos generó las condiciones necesarias para finalmente estrechar los vínculos entre las ciencias sociales y las ciencias duras. Si bien durante muchos años, los puntos de contacto quedaban reducidos al uso de la lógica y los análisis estadísticos, la aparición de nuevas ramas de la matemática, que discutimos a continuación, permitió avanzar en el desarrollo de un nuevo paradigma.

En el periodo post guerra, de la mano de John von Neumann, Oskar Morgenstern y John Nash [19, 37, 39], se formaliza la teoría de juegos. Al principio es utilizada para el estudio de los procesos de toma de decisión, principalmente para estrategia militar, y con alta demanda durante la guerra fría entre la antigua Unión Soviética y los Estados Unidos. Posteriormente muestra ser útil en otras áreas como la economía, la psicología y la filosofía, brindando una herramienta más, provenientes de las ciencias exactas, para ser usada en el estudio de los sistemas sociales. También en los años '50 aparecen aportes relevantes en el área de teoría de grafos con los trabajos de Erdős y Renyi [40] acerca

de redes aleatorias y su estrecha relación con la teoría de percolación. Años después este trabajo daría origen al estudio de las redes complejas y a su utilización, entre otras cosas, para describir el entramado de las relaciones sociales y/o interpersonales.

Para la misma época aparecen los primeros aportes al estudio de los sistemas de tránsito, principalmente de Ilya Prigogine [41] quien propone estudiar este tipo de sistemas con conceptos directamente tomados de la física de los fluidos. Por otro lado, también con aportes de Prigogine, René Thom, pero principalmente de Christopher Zeeman [42] comienzan a estudiarse en más detalle las bifurcaciones asociadas a sistemas dinámicos en el marco de lo que se denominó Teoría de catástrofes. Aunque formalmente hoy puede pensarse como una rama de los sistemas dinámicos, en su época de auge (década del '70) fue muy utilizada por varias ramas de las ciencias sociales como la lingüística, la estrategia y la sociología.

También en la década del '70, han sido muy interesantes los aportes del politólogo Robert Axelrod [43–45], en temas que tienen que ver con la política y la resolución de conflicto de intereses, los procesos de toma de decisión y más adelante sus estudios acerca de la evolución de la cooperación; y los trabajos de Wolfgang Weidlich [46] en la descripción del fenómeno de polarización social. Para la misma época, comienza con sus trabajos Serge Galam, quien realiza varias contribuciones a lo largo de la década de los '80 y '90, principalmente en temas relacionados a la estructura jerárquica en sistemas de votación y sus estudios acerca de la regla de la mayoría [47].

El crecimiento exponencial que ocurre con la capacidad de cálculo computacional en la década final del siglo pasado, dispara el tratamiento de los sistemas complejos a partir de simulaciones numéricas. Los modelos de autómatas y de agentes comienzan a ser utilizados en masa para tratar sistemas sociales, en particular para estudiar la emergencia de fenómenos colectivos como consenso, polarización y segregación de poblaciones de individuos. Esto lleva a que en los primeros años del siglo XXI resurja un especial interés por estudiar las propiedades de las redes complejas, que emergen de manera natural a través de las relaciones sociales, tanto individuales como institucionales. En esta área se destacan los trabajos de Watts, Duncan y Strogatz, en sus estudios acerca de la generación de redes de mundo pequeño (small world) [48], y también los de Lazzlo Barabasi y Reka Albert, quienes en 1999 aplicaron el concepto de “acoplamiento preferencial” para explicar el proceso de formación de las redes libres de escala y lo aplicaron para describir la distribución de grados de las redes de la web [49]. Esto último ha sido fundamental para realizar estudios y análisis de grandes conjuntos de datos [50], provenientes del nuevo paradigma informático impuesto por la aparición de internet, el auge de la telefonía celular y las redes sociales como Facebook o Twitter.

En la actualidad, el estudio de los sistemas sociales como sistemas complejos, se considera más que un simple intento por aportar conceptos de matemática y física a las ciencias sociales. Se trata de una rama más de la física de los sistemas complejos que

concibe a estos fenómenos como propiedades emergentes que surgen de la interacción de un conjunto de individuos y que producen nuevas conductas cuyo estudio no puede reducirse al estudio de los componentes aislados.

Para finalizar, es de notar que el principal problema que se afronta hoy, en el estudio de los sistemas sociales, es la validación de las teorías propuestas con evidencia empírica proveniente de experimentos repetibles y cantidades medibles que sirvan de soporte para desarrollar nuevas teorías y nuevos experimentos. Parte de esta tesis se orienta en atacar este problema.

1.4. Objetivos y estructura de la tesis

Esta tesis tiene como objetivo general realizar un análisis de las propiedades emergentes de sistemas sociales, con el objetivo específico de crear conocimiento a través de un enfoque interdisciplinario, aplicando para ello métodos derivados de la física estadística como son los sistemas estocásticos, los sistemas dinámicos, la teoría de grafos y la teoría de juegos.

Los temas que aquí se encaran son diversos pero se encuentran en el objetivo común de estudiar el efecto de la variedad de comportamiento individual, en los sistemas sociales, a un nivel global.

La tesis se estructura de la siguiente manera, además de este capítulo introductorio, este documento cuenta con un capítulo acerca de métodos teóricos, donde se discute formalmente acerca de las principales herramientas utilizadas para la realización de este trabajo.

Cuatro capítulos más engloban el trabajo de investigación realizado (del 3 al 7). Los dos primeros son dedicados a contar nuestros resultados en el estudio de los mecanismos de formación de opinión. El capítulo tres propone el estudio teórico del efecto del disenso en pequeños grupos cerrados y su efecto a nivel de sistema. En el cuarto encaramos un estudio experimental, en donde el objetivo principal fue obtener resultados que evidencien los mecanismos de formación de opinión subyacentes y que den soporte empírico a los diversos modelos preexistentes, una demanda histórica en esta área de estudio.

Sobre temática de teoría de juegos, encaramos en el quinto capítulo una variación del juego conocido como “batalla de los sexos”, donde nos propondremos modelar una dinámica en la cual la elección de estrategias esta guiada por un comportamiento más bien inconsciente que totalmente racional.

Un sexto capítulo esta dedicado al estudio de un sistema de transmisión de información basado en redes complejas. En este sistema estudiamos principalmente el efecto de la topología de red en la maximización (o minimización) de posibles errores intrínsecos en el proceso de intercambio de información, los cuales, en algunos contextos, pueden

ser asociados a errores provenientes de la intervención humana en la administración de la información.

En el séptimo capítulo describimos un modelo estocástico de tránsito en el cual estudiamos el efecto combinado de la introducción de un semáforo en el sistema y el comportamiento de los conductores, en la producción de embotellamientos y retrasos en el flujo vehicular.

Por último, ponemos punto final al trabajo con un capítulo de conclusiones, con el fin de englobar en términos generales los principales resultados obtenidos y proponer posibles pasos a seguir en estas mismas líneas de estudio.

Bibliografía

- [1] G S Kirk, J E Raven & M. Schofield, (1983) Los Filósofos presocráticos. Editorial Gredos, segunda edición. [1](#)
- [2] H May, (1999) On Socrates, Cengage Learning. [2](#)
- [3] C Bruell, (1994) On Plato's Political Philosophy, The Review of Politics, Vol. 56, No. 2 (Spring), pp. 261-282. [2](#)
- [4] Aristoteles, The Politics, Edición de Distal SRL, 2004. [2](#)
- [5] H Forde, Domesday Preserved, Public Record Office. ISBN 0-11-440203-5, 1986. [2](#)
- [6] N Maquiavelo, El príncipe (1531), Trad. por Helena Puigdomenech, Madrid, ed. Tecnos, 1998. [2](#)
- [7] Ibn Khaldûn, The Muqaddimah: An Introduction to History, Trad. por Franz Rosenthal Abridged, ed. de N. J. Dawood, Princeton U. Press, 2015. [2](#)
- [8] T Hobbes, Leviathan: With Selected Variants from the Latin Edition of 1668, ed. de E. M. Curley, Hackett Publishing Company, 1994. [3](#)
- [9] J J Rousseau, El contrato social, ed. Nuestros Clásicos, UNAM, Coordinación de Humanidades, 1984. [3](#)
- [10] A Thiers, Historia de la Revolucion francesa, Trad. por Sebastián Miñano, ed. Complutense de Madrid, vol. 10, 2010. [3](#)
- [11] A Bilbao, (1979) El positivismo y la sociología, Serie Sociología: Colección Teoría y análisis sociológico Teoría y análisis sociológico, ed. Saltés. [4](#)
- [12] J Persky. (1995) Retrospectives: The ethology of homo economicus. The journal of economic perspectives 9.2: 221-231. [4](#)
- [13] J S Mill, On the Definition of Political Economy, and on the Method of Investigation Proper to It, London and Westminster Review, October 1836. Essays

- on Some Unsettled Questions of Political Economy, 2nd ed. London: Longmans, Green, Reader & Dyer, 1874, essay 5, paragraphs 38 and 48. [4](#)
- [14] V Pareto. Cours d'Économie Politique Professé a l'Université de Lausanne. Vol. I, 1896; Vol. II, 1897 [4](#)
- [15] L Walras. Elements of pure economics. Routledge, 2013. [4](#)
- [16] P Ricoeur, (1981) Corrientes de la investigación en las ciencias sociales, Tecnos/Unesco, vol. 4, pag. 346.
- [17] J Elster, (1986) An Introduction to Karl Marx, Cambridge University Press. [5](#)
- [18] E Royce, (2015) Classical Social Theory and Modern Society: Marx, Durkheim, Weber'Rowman y Littlefield. [5](#)
- [19] Jonathan Lear. Freud. *Psychology Press*, cap. 5 y 6, 2005. [6](#)
- [20] A Kruglanski, E T Higgins, (2007) Social Psychology: Handbook of Basic Principles, Guilford Press. [6](#)
- [21] D Kipnis & W P Lane, (1962). Self-confidence and leadership. *Journal of Applied Psychology*, 46(4), 291. [6](#)
- [22] J A Kolb (1999). The effect of gender role, attitude toward leadership, and self-confidence on leader emergence: Implications for leadership development. *Human Resource Development Quarterly*, 10(4), 305.
- [23] J Jennings-Walstedt, F L Geis, & V Brown, (1980). Influence of television commercials on women's self-confidence and independent judgment. *Journal of Personality and Social Psychology*, 38(2), 203. [6](#)
- [24] R J Crisp, R N Turner, (2010) Essential Social Psychology, SAGE, pag. 162. [7](#)
- [25] S E Asch, (1951) Effects of group pressure on the modification and distortion of judgments, In H. Guetzkow (Ed.), *Groups, leadership and men*, pp. 177–190. [7](#)
- [26] P Lunt, (2009) Stanley Milgram: Understanding Obedience and Its Implications, Palgrave Macmillan. [7](#)
- [27] S Milgram, (1963) Behavioral Study of Obedience, *Journal of Abnormal and Social Psychology*, 67 (4): 371–8. [8](#)
- [28] C Camerer,(2003) Behavioral game theory: Experiments in strategic interaction. Princeton University Press. [8](#)

-
- [29] A Botelho et al, (2009) Testing static game theory with dynamic experiments: a case study of public goods. *Games and Economic behavior*, 67(1), 253-265. [8](#)
- [30] A Falk & U Fischbacher, (2006) A theory of reciprocity. *Games and economic behavior*, 54(2), 293-315. [9](#)
- [31] C F Camerer & E Fehr, (2004) Measuring social norms and preferences using experimental games: A guide for social scientists. *Foundations of human sociality: Economic experiments and ethnographic evidence from fifteen small-scale societies*, 97, 55-95. [8](#)
- [32] D Sally, (1995) Conversation and cooperation in social dilemmas a meta-analysis of experiments from 1958 to 1992. *Rationality and society*, 7(1), 58-92.
- [33] C F Camerer et al, (2004) A cognitive hierarchy model of games. *The Quarterly Journal of Economics*, 119(3), 861-898. [9](#)
- [34] E Fehr, U Fischbacher & S Gächter, (2002) Strong reciprocity, human cooperation, and the enforcement of social norms. *Human nature*, 13(1), 1-25. [9](#)
- [35] A G Miller, (1986) *The obedience experiments: A case study of controversy in social science*, Praeger Publishers.
- [36] A Rapoport, (1953) *Operational Philosophy: Integrating Knowledge and Action*, Harper & Bros.
- [37] R Leonard, (2010) *Von Neumann, Morgenstern and the Creation of Game Theory*, Cambridge University Press. [9](#)
- [38] J Nash, (1950) Equilibrium points in n-person games, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **36** (1):48-49. [9](#), [19](#)
- [39] J Nash, (1951) Non-Cooperative Games, *The Annals of Mathematics*, **54** (2):286-295. [9](#)
- [40] P Erdős & A Rényi, (1959) On Random Graphs. I. *Publicationes Mathematicae*. 6: 290–297. [9](#)
- [41] I Prigogine, R Hernan, (1971) *Kinetic Theory of Vehicular Traffic*, New York: American Elsevier. [10](#)
- [42] E C Zeeman, (1976) Catastrophe Theory, *Scientific American*, pp. 65–70, 75–83. [10](#)
- [43] R Axelrod, (1970) *Conflict of interest: a theory of divergent goals with applications to politics*, Markham Pub. Co. [10](#)

-
- [44] R Axelrod, (1976) *Structure of Decision: The Cognitive Map of Political Elites*, Princeton University Press.
 - [45] R Axelrod, (1984) *The Evolution of Cooperation*, Basic Books. [10](#)
 - [46] W Weidlich, (2000) *Sociodynamics: a Systematic Approach to Mathematical Modelling in the Social Sciences*, Harwood Academic Publishers: Amsterdam. [10](#)
 - [47] S Galam, (2008) Sociophysics: A review of Galam models, arXiv:0803.1800 [physics.soc-ph]. [10](#)
 - [48] D J Watts & H Strogatz, (1998) Collective dynamics of ‘small-world’ networks, *Nature* 393.6684 (1998): 440-442. [10](#)
 - [49] A L Barabási , R Albert, (1999) Emergence of scaling in random networks”, *Science* 286.5439: 509-512. [10](#)
 - [50] B Baesens, (2014) *Analytics in a Big Data World: The Essential Guide to Data Science and its Applications*, John Wiley & Sons. [10](#)

Capítulo 2

Conceptos teóricos básicos

Las herramientas de estudio que fueron utilizadas para construir este trabajo, son las que usualmente se utilizan para la investigación en el campo de la física estadística y la física de los sistemas complejos. Siendo la literatura muy abundante y sólida en estos campos, en este capítulo se hará solo una breve introducción acerca de aquellas herramientas que en concreto fueron utilizadas en esta tesis.

En los apartados siguientes, entonces, describimos las características básicas de los modelos de formación de opinión basados en sistemas de espines, haciendo hincapié principalmente en describir el modelo del votante; también describimos algunos conceptos útiles de sistemas dinámicos, de teoría de juegos, y de teoría de redes complejas.

2.1. El modelo del votante

Probablemente el modelo más estudiado en el tópico de formación de opinión sea el modelo del votante. El mismo, es un proceso estocástico que representa un tipo específico de interacción en un sistema de partículas dado.

La versión más simple del modelo considera un sistema de N partículas interactuantes, las cuales son representadas en una red en la cual cada “votante” ocupa un nodo de esta. Cada partícula tiene dos estados posibles 1 o -1 , lo cual representa una opinión binaria acerca de algún tema en debate. La evolución temporal de las partículas se da según el siguiente esquema: (i) a cada paso de tiempo, se elige un votante de la red al azar (ii) éste a su vez toma al azar la opinión de alguno de sus vecinos y la copia.

De este simple mecanismo de imitación emergen propiedades interesantes, el modelo del votante es uno de los pocos procesos estocásticos que tiene resolución exacta en todas las dimensiones. En particular, para una cadena unidimensional, destacamos las siguientes propiedades [1, 2],

- Independientemente de las opiniones iniciales de todos los nodos de la red, el esta-

do final asintótico es el consenso total de la población, es decir toda la población termina con opinión $+1$ o con opinión -1 .

- La probabilidad de que el sistema termine en el estado $+1$, respecto a la densidad inicial de partículas en ese estado ρ_0 , es $P_+(\rho_0) = \rho_0$
- El tiempo en que el sistema alcanza el consenso va como $t \sim N^2$.

Por otro lado, el modelo del votante ha sido el punto de partida para la propuesta de modelos similares que usan la representación de espines para la opinión. Entre ellos el modelo de Sznajd-Weron [3], uno de los más citados de la literatura, donde los autores toman la idea del modelo del votante y lo engloba en contexto más social, utilizando las observaciones experimentales de Solomon Asch [4] y otros para justificar las reglas de evolución de su modelo.

En la siguiente sección discutimos algunos conceptos básicos de sistemas dinámicos.

2.2. Elementos de sistemas dinámicos

Un sistema dinámico es un sistema cuyos estados evolucionan con el tiempo. La idea de estado aquí puede ser abstracta, y abarca el modelado de problemas en campos tan distintos como la física, la biología o la economía. El comportamiento de estos estados se pueden caracterizar teniendo en cuenta los límites del sistema, los elementos que lo conforman y sus relaciones [5].

Si el sistema esta conformado por n variables y su evolución puede ser descripta por n reglas funcionales $\mathbf{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ se puede escribir el conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= F_1(\mathbf{x}, t) \\ \dot{x}_2 &= F_2(\mathbf{x}, t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= F_n(\mathbf{x}, t), \end{aligned}$$

donde $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ son las variables del sistema. Si estas relaciones no dependen explícitamente del tiempo, es decir $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \forall t$, se dice que es un sistema autónomo. Por otro lado este tipo de sistemas puede ser lineal o no lineal. Si es del primer tipo, existen técnicas muy utilizadas para su análisis y es usual encontrar soluciones analíticas exactas. Si el sistema es no lineal el análisis se vuelve mucho más complejo, y para su análisis es usual recurrir a técnicas geométricas de visualización de las variables del sistema. El espacio de fases de un sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ es el espacio donde todos los posibles estados del sistema son representados. El campo vectorial \mathbf{F}

rige el recorrido de las variables $\mathbf{x}(t)$ en el tiempo, y al recorrido de estas variables se lo llama trayectoria.

Además de las trayectorias, en los diagramas de fase es interesante estudiar las singularidades. Los valores \mathbf{x}^* tal que se cumpla que $F(\mathbf{x}^*) = 0$ Son llamados puntos fijos, allí el campo vectorial que determina las trayectorias en el espacio de fases es nulo. En un \mathbf{x}^* dado, las líneas de trayectoria pueden ser tal que salen de este, caracterizando lo que se conoce como *fuelle*; puede ser que entren en éste, definiendo un *atractor*; o puede ser del tipo *punto silla*, en donde las trayectorias tienden hacia el punto pero luego divergen de él.

El análisis de los puntos fijos de un sistema es una herramienta muy útil para hacer estudios de estabilidad o de equilibrio. Formalmente, se dice que un punto fijo atractivo \mathbf{x}_0 es un equilibrio si y solo si es Lyapunov estable [5], es decir si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si \mathbf{x} es solución de la ecuación con $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0\| < \delta$, entonces para $t \geq 0$ se tiene $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0\| < \epsilon$.

En el apartado siguiente se describen brevemente los conceptos más relevantes (para esta tesis) de teoría de juegos. Allí veremos que este último concepto de equilibrio reaparece como una herramienta fundamental para el análisis de los llamados juegos evolutivos [6].

2.3. Elementos de teoría de juegos

La teoría de juegos es una rama de la matemática aplicada que estudia formalmente problemas de conflicto y procesos de toma de decisiones, usando como base al estudio de la elección de estrategias óptimas en función de una utilidad o de algún costo.

En su forma normal o estratégica, un juego G se define por los siguientes elementos [7-9]:

- N participantes que interactúan.
- El conjunto de estrategias puras $S_i = \{s_{i1}, \dots, s_{iq}\}$ que define un perfil estratégico para cada participante.
- El conjunto de los perfiles estratégicos $S = \{S_1, \dots, S_i, \dots, S_N\}$ de cada jugador.

Así mismo, dado el perfil estratégico del jugador, éste puede optar por jugar con mayor o menor probabilidad una u otra estrategia pura, la manera de representar esto es definiendo lo que se conoce como estrategias mixtas, matemáticamente se define para cada jugador, un vector $X_i = (p_{i1}, \dots, p_{iq})$ en donde cada componente se corresponde con el peso probabilístico de jugar dicha estrategia.

Un concepto importante para esta teoría es lo que se conoce como equilibrio de Nash. Quien en [19], demostró que cualquier juego de estrategias finitas tiene al menos un

equilibrio en estrategias mixtas. Estos equilibrios vienen dados en el siguiente sentido: si se supone que cada uno de los jugadores conoce las estrategias de los otros y en función a eso eligen sus mejores estrategias, luego el juego llega a un equilibrio, ya que no hay incentivo que motive un cambio. Es de notar que este equilibrio, no implica necesariamente un mejor resultado para el conjunto, sino más bien el mejor resultado individual para cada jugador.

A modo de ejemplo y con el fin de ilustrar conceptos que son utilizados en el capítulo 5, en las líneas que siguen describimos el juego conocido como “Batalla de los sexos”.

2.3.1. La batalla de los sexos:

En este juego [11], Agustín (A) y Belén (B) tienen que decidir si ir de vacaciones a la playa (P) o a la montaña (M). Agustín prefiere la playa, pero Belén en cambio prefiere la montaña. Lo cierto es que ambos quieren ir juntos y prefieren esto a ir de vacaciones por separado, lo cual los obliga a ponerse de acuerdo. Este tipo de juegos es conocido como juego de coordinación, ya que las ganancias para ambos jugadores es más alta si sus estrategias coinciden.

La matriz de pagos asociada a un juego, es una herramienta teórica muy útil ya que resume toda la información del mismo, una de las matrices de pagos posibles asociadas a la batalla de los sexos se muestra en la tabla 2.1. Cada casillero de la matriz indica un pago, al cual denotaremos π , que es una función de las estrategias elegida por el jugador. Por ejemplo en el caso en el que Agustín elige “Playa” y Belén elige “Playa”, el primero ganará 2 puntos y el segundo 1 punto, es decir $\pi(P, P)_A=2$ y $\pi(P, P)_B=1$, ambos ganan aunque uno más que otro. Si en cambio Agustín elige “Playa” y Belén insiste con “Montaña” entonces no hay coordinación, y ambos jugadores pierden 1 punto. $\pi(P, M)_A=\pi(P, M)_B=-1$, Los otros casos posibles siguen la misma lógica.

	Playa	Montaña
Playa	2,1	-1,-1
Montaña	-1,-1	1,2

Tabla 2.1: Matriz de pagos asociada al juego de la batalla de los sexos.

En el ejemplo de la batalla de los sexos, hay dos equilibrios de Nash posibles, si ambos juegan “P” o si ambos juegan “M”, es decir si coordinan.

Si tomamos N agentes y hacemos que interactúen mediante el juego a lo largo del tiempo, dos preguntas surgen naturalmente. La primera es ¿qué tan estable es un equilibrio si un porcentaje de la población comienza a jugar una estrategia distinta? [10] Dadas dos estrategias s y s^* donde la primera es el equilibrio estático y la segunda la estrategia nueva o “invasora”, se dice que la estrategia s es evolutivamente estable si

se cumple $\pi(s, s^*) < \pi(s, s)$, es decir si los jugadores que intentan la nueva estrategia s^* obtienen menos beneficios que jugando s . Este criterio de estabilidad evolutiva enfatiza el papel de posibles cambios en la variedad de la población, este razonamiento lleva a la segunda pregunta, ¿que mecanismo de selección favorece a algunas variedades sobre otras? es decir ¿por que parte de la población elegiría una nueva estrategia? La búsqueda de una respuesta a esta pregunta llevó a Taylor y Jonker (1978) a definir la dinámica conocida como del replicador [12–14], la misma se discute en las líneas siguientes.

2.3.2. La dinámica del replicador:

Consideremos en este caso una población capaz de ofrecer una amplia gama de comportamientos, es decir, capaz de optar por una variedad de estrategias en el juego. Si dicho juego tiene n estrategias puras, y un participante que juega la estrategia i se encuentra con otro que juega la estrategia j , el pago que recibe el primero viene dado por π_{ij} . Suponiendo que el vector $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ es la fracción de cada tipo de jugador o estrategia en la población, el pago del jugador i es entonces $\pi_i(p) = \sum_j^n p_j \pi_{ij}$. El pago promedio del juego vendrá dado por $\overline{\pi(p)} = \sum_i^n p_i \pi_i(p)$, con esto la dinámica del replicador se define $\forall i$ como

$$\dot{p}_i = p_i(\pi_i(p) - \overline{\pi(p)}) \quad (2.1)$$

Lo que expresa esta ecuación es que las estrategias cuyas densidades crecen son aquellas que se desempeñan mejor que el promedio, y que en general las estrategias con mayor desempeño son las que crecen más rápido.

Con este enfoque, un equilibrio de Nash del sistema coincide con un equilibrio del sistema dinámico. Además todos los puntos fijos estables son equilibrios de Nash y un punto fijo asintóticamente estable es un equilibrio perfecto [20].

2.4. Elementos de Redes complejas

Es interesante pensar a las redes complejas como un soporte o estructura donde se propaga información. Así, en el caso concreto de redes tecnológicas, como por ejemplo internet, la información que se propaga a través de la red son esencialmente datos. En el caso de las redes sociales, la información que se propaga dependerá de la dinámica del problema a modelar, por ejemplo en el caso de dinámica de formación de opinión lo que se propaga es la postura (opinión) de los agentes que forman la red, respecto a un tema en debate.

Una red se puede definir como sigue [15], dado un conjunto finito de nodos V y un conjunto de conexiones E que relacionan a estos nodos, se define a la red (o grafo) G

como al objeto matemático dado por el par ordenado $G = (V, E)$, Donde cada conexión en E se representa como un par ordenado (i, j) donde i y j son dos nodos de V que están conectados.

Una de las formas más ampliamente extendidas de representar un grafo es a través de lo que se conoce como matriz de adyacencia. En esta matriz las filas y las columnas representan los nodos de la red, y un valor distinto de cero en el elemento $i - j$ de esta, representa una conexión entre esos nodos. El valor que ese elemento toma, representa el “peso” de la conexión. La matriz de adyacencia es un objeto matemático con muchas propiedades interesantes, y suele ser muy utilizado para definir coeficientes que caracterizan la topología de red. Esto mismo quedará ejemplificado más adelante en el texto cuando definamos el coeficiente de asortatividad.

Matemáticamente, un grafo puede ser definido como dirigido, en el cual las conexiones tienen una dirección determinada, o como no dirigido donde las conexiones no determinan dirección alguna. Todo lo que se discute en esta sección es para grafos no dirigidos, ya que fueron los que se utilizaron para realizar este trabajo.

La cantidad de nodos de un grafo G define lo que se conoce como orden del grafo, y la cantidad de conexiones de un dado nodo $i \in V$ se define como su grado y se lo denota k_i . La distribución de grados de la red, $P(k)$, es una característica principal que define el tipo de red con la cual se está trabajando. En particular, para realizar este trabajo se utilizaron arreglos unidimensionales y bidimensionales, redes Small World regulares (k-SWN), redes regulares tipo Small World propiamente dichas y redes libres de escala (SFN). También se utilizaron redes completamente conectadas, donde se dice que un grafo está completamente conectado, cuando todos los nodos en V están conectados entre si. En este caso si el orden del grafo es N , el grado de cada nodo será $k_i = N - 1$.

Por otro lado, se dice que un nodo i es vecino de otro nodo j cuando existe el par (i, j) en E . Con esta idea, se puede definir al vecindario de un nodo $i \in V$ como al conjunto N_i dado por todas sus conexiones.

2.4.1. Parámetros topológicos

Entender la topología de un grafo puede ser muy relevante a la hora de interpretar los resultados arrojados por una dinámica. En ese sentido, varios parámetros característicos ayudan a entender como está formada la estructura de la red. En los siguientes párrafos se discute de el coeficiente de agrupamiento o clustering, de la distancia media de la red, la asortatividad.

Clustering El clustering [17] es una medida de que tan agrupado está un nodo respecto a sus vecinos. Localmente y para un nodo $i \in V$ dado, este coeficiente se calcula como la razón entre el número real de conexiones entre todos sus vecinos y el

valor correspondiente al mayor agrupamiento posible, dado por un grafo completamente conectado de grado igual al del nodo i , k_i :

$$C_i = \frac{|(j, k) \in E / j, k \in N_i|}{k_i(k_i - 1)}, \quad (2.2)$$

donde las barras $|\cdot|$ indican el modulo, o tamaño del conjunto dado. El promedio de la cantidad C_i , sobre todos los nodos de la red, será el coeficiente de clustering global.

Distancia media Se denomina como distancia entre dos nodos de un grafo [18] al número mínimo de nodos que deben recorrerse para unirlos. Es decir, es un parámetro que esta asociado a las longitudes del camino más corto. Si se miden estas longitudes para todo par de nodos en la red y se lo promedia, se obtiene el parámetro global conocido como distancia media de la red.

Sea $l_G(i, j)$ la distancia de camino más corto entre el par $(i, j) \in E$, definimos a la distancia media del grafo G como:

$$Dm = \frac{\sum_{ij} l_G(i, j)}{|\{i, j\} : l_G(i, j)|}, \quad (2.3)$$

lo cual es válido $\forall l_G(i, j) < \infty$.

Asortatividad La asortatividad [15, 16] de una red tiene que ver con su correlación de grado. Se ha observado en redes reales, que en las redes sociales los nodos de grado alto suelen estar conectados a nodos de grado alto. En términos simples se puede decir que la gente “popular” suele estar conectada con gente “popular”. Así mismo se ha observado que en las redes tecnológicas, nodos de grado alto suelen estar conectados a nodos de grado bajo, formando estructuras tipo “hubs”.

Esta correlación de grado que emerge naturalmente en las redes reales puede ser caracterizada por el parámetro asortatividad. La forma estándar de medirlo, es a partir del coeficiente de correlación de Pearson de los grados de dos nodos conectados. En términos globales se define como:

$$r = \frac{\sum_{jk} (A_{ij} - k_i k_j / 2m) k_i k_j}{\sum_{jk} (k_i \delta_{ij} - k_i k_j / 2m) k_i k_j}, \quad (2.4)$$

donde la suma barre sobre todos los m pares (i, j) de la red, A es la matriz de adyacencia y k_n se corresponde con el grado del nodo n . Este coeficiente es tal que $-1 \leq r \leq 1$. Donde $r > 0$ significa redes asortativas (redes sociales), $r=0$ redes neutras y $r < 0$ redes desasortativas (redes tecnológicas).

Bibliografia

- [1] T M Liggett, (1999) Stochastic interacting systems: contact, voter, and exclusion processes, Springer-Verlag, New York. [17](#)
- [2] V Sood, & S Redner, (2005) Voter model on heterogeneous graphs. Physical review letters, 94(17), 178701. [17](#)
- [3] K Sznajd-Weron, (2005) Sznajd model and its applications. arXiv preprint physics/0503239. [18](#)
- [4] K S Larsen, "The Asch conformity experiment: Replication and transhistorical comparisons." Journal of Social Behavior & Personality (1990). [18](#)
- [5] S H Strogatz, (2014) Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering. Westview press. [18](#), [19](#)
- [6] J.D. Murray, (1989) Mathematical Biology, Springer Verlag, Berlin. [19](#)
- [7] M J Osborne, (2004) An introduction to game theory. Vol. 3. No. 3. New York: Oxford university press. [19](#)
- [8] L A Dugatkin & H K Reeve, (2000) Game theory and animal behavior. Oxford University Press.
- [9] R B Myerson, (2013) Game theory. Harvard university press. [19](#)
- [10] J W Weibull, (1997) Evolutionary game theory. MIT press. [20](#)
- [11] H Gintis, (2009) The bounds of reason: Game theory and the unification of the behavioral sciences. Princeton University Press. [20](#)
- [12] P Schuster & K Sigmund, (1983) Replicator dynamics. Journal of theoretical biology, 100(3), 533-538. [21](#)
- [13] I M Bomze, (1983) Lotka-Volterra equation and replicator dynamics: a two-dimensional classification. Biological cybernetics, 48(3), 201-211.

-
- [14] A Gaunersdorfer, J Hofbauer & K Sigmund, (1991) On the dynamics of asymmetric games. *Theoretical Population Biology*, 39(3), 345-357. [21](#)
 - [15] M E J Newman, (2010) *Networks an introduction*, University of Michigan and Santa Fe Institute, Oxford press. [21](#), [23](#)
 - [16] M E Newman, (2002) Assortative mixing in networks. *Physical review letters*, 89(20), 208701. [23](#)
 - [17] D J Watts & S H Strogatz, (1998) Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature*, 393(6684), 440-442. [22](#)
 - [18] A Clauset, C Moore & M E J Newman, (2008) Hierarchical structure and the prediction of missing links in networks. *Nature*, 453(7191), 98-101. [23](#)
 - [19] J Nash, (1951) Non-cooperative games. *Annals of mathematics*, 286-295. [9](#), [19](#)
 - [20] I M Bomze, (1986) Non-cooperative two-person games in biology: A classification. *International journal of game theory*, 15(1), 31-57. [21](#)

Capítulo 3

Propagación de disenso en un modelo de formación de opinión

Desde el punto de vista de la física estadística, los modelos de formación de opinión constituyen un paradigma central en la descripción matemática de procesos sociales. Desde los años '70 y '80 [2–5] hasta la actualidad, se han realizado muchos trabajos que explotan el parecido formal existente entre la difusión de opinión y la dinámica de espines, con el objetivo de aplicar técnicas estadísticas bien conocidas, para analizar esta clase de modelos.

El principal mecanismo que utilizado por la mayoría de los modelos de formación de opinión basados en agentes es la imitación. Por ejemplo en el modelo del votante, la interacción básica consiste en un agente que copia la opinión de otro agente escogido al azar de una vecindad específica. A cada instante de tiempo, los agentes adoptan una de las dos opciones, típicamente denotada como ± 1 . El modelo del votante es resoluble exactamente para poblaciones de agentes distribuidas en cadenas (hiper) cubicas en cualquiera dimensión [6].

Para poblaciones infinitamente grandes, el modelo se caracteriza por la conservación de la opinión promedio.

En una dimensión, una población de tamaño finito siempre alcanza un estado absorbente de consenso colectivo total, es decir con todos los agentes compartiendo la misma opinión. La probabilidad de consenso final en cualquiera de las dos opiniones esta vinculada a la fracción inicial de agentes con esa opinión, y el tiempo necesario para alcanzar el estado absorbente es del orden del cuadrado del tamaño de la población del sistema [1].

La idea de este trabajo es presentar un análisis de una clase de modelo en el cual la dinámica de opinión sea dirigida por la difusión de consenso y disenso, en lugar de por la difusión de opiniones individuales. El concepto básico detrás de este modelo es que el acuerdo entre opiniones individuales en una porción localizada de la población

puede promover la aparición de consenso en una vecindad de esa porción, mientras que el disenso, en contraste, puede inhibir el crecimiento, o incluso hacer decrecer el consenso en regiones aledañas. En sistemas sociales reales, el mecanismo de difusión de consenso y disenso debería ser complementaria al mecanismo de transmisión directa de opinión entre agentes individuales. En nuestro modelo sin embargo, despreciaremos esto último para centrarnos en estudiar los efectos de la primera.

Dado que, en nuestro modelo, el grado de consenso solo puede ser definido por dos o mas agentes, la difusión de consenso y disenso involucra grupos de agentes en lugar agentes individuales. Estos grupos son entonces la entidad elemental en la interacción social propuesta [7–11].

Se hace hincapié en que varios otros fenómenos sociales, relacionados a los procesos de toma de decisión [10] y colocación de recursos [12], estan basados en grupos de agentes interactuantes que no pueden reducirse a eventos de dos agentes. En la clase de modelo que analizamos aquí, cada evento de interacción sucede entre dos grupos, a los cuales llamaremos *grupo activo* G y *grupo de referencia* G' . Como resultado de la interacción, los agentes en G cambian sus opiniones individuales en la manera en que el nivel de consenso en G se aproxima al de G' . Este mecanismo genérico extiende las reglas dinámicas cuando la opinión de cada uno de los agentes cambia en respuesta a un estado colectivo de un grupo de referencia [1, 8, 13, 14].

El tamaño y la estructura interna de los grupos interactuantes, tanto como la manera en la cual las opiniones se modifican en el grupo activo, respecto al grupo de referencia define cada modelo en esta clase.

Limitamos el análisis a sistemas donde, como en el modelo del votante, las opiniones individuales pueden adoptar dos valores (± 1).

En el apartado siguiente, se analizan los casos donde tanto el grupo activo como el grupo de referencia, están formados por dos agentes, y la población esta estructurada como una cadena unidimensional. En este caso, el sistema admite estados absorbentes estacionarios de consenso total y máximo disenso, con simples leyes de escala que van con el tamaño del sistema.

En la sección 3.2, se analiza una versión bidimensional del mismo tipo de modelo con grupos más grandes, donde se observó la aparición de un fenómeno crítico no trivial, no presente en el caso unidimensional.

Los resultados y perspectivas de este trabajo son resumidos en las conclusiones generales de la sección final.

3.1. Grupos de dos agentes en una cadena unidimensional

Consideramos la situación simple donde cada uno de los dos grupos involucrados en cada evento de interacción esta formado por solo dos agentes. La situación con cada grupo, entonces, es de consenso total (cuando dos agentes comparten la misma opinión, ya sea $+1$ o -1) o de máximo disenso (cuando sus opiniones son diferentes).

Tomamos una población de agentes distribuidos en una cadena unidimensional, y numerada consecutivamente desde 1 a N . Condiciones periódicas de contorno son aplicadas en los extremos.

A cada paso de tiempo, se escogen cuatro agentes contiguos, diremos desde $i - 1$ a $i + 2$. El par central dado por i y $i + 1$ actúa como el grupo de referencia G' . Si estos están en disenso, los agentes $i - 1$ y $i + 2$ adoptan respectivamente las opiniones opuestas de i y $i + 1$ con probabilidad p_D , mientras que con la probabilidad complementaria $1 - p_D$ nada ocurre. La idea que envuelve esta parte del modelado, es que el agente activo imite la actitud del grupo de referencia, que en este caso es disentir con su agente de al lado.

Si por el otro lado, i y $i + 1$ comparten la misma opinión, es decir están de acuerdo, $i - 1$ y $i + 2$ copian la opinión común en G' con probabilidad p_C , mientras con probabilidad $1 - p_C$ nada ocurre. De esta manera tanto el consenso como el disenso se propaga fuera del grupo de G' hacia izquierda y derecha. A cada paso de tiempo N grupos son excitados para inducir un cambio, de esta manera la actualización de los agentes del sistema se realiza en forma asincrónica. Las probabilidades p_C y p_D controlan la frecuencia relativa con la cual el consenso y el disenso son transmitidos en forma efectiva. La parte izquierda de la Fig. 3.1, muestra los estados de los cuatro agentes involucrados y los dos posibles resultados de la interacción.

No es difícil darse cuenta de que, para $p_D = p_C = 1$, nuestra cadena es equivalente a dos subpoblaciones intercaladas, respectivamente ocupando sitios pares e impares, cada una de ellas evolucionando de acuerdo al modelo del votante. Las reglas de la dinámica quedan reducidas en este caso a interacciones binarias entre agentes. En efecto, cualquiera sean las opiniones en el grupo G' a cada interacción, los agentes $i - 1$ y $i + 2$ copian respectivamente las opiniones de $i + 1$ y i . Ahora bien, el modelo del votante siempre lleva a una población finita hacia el estado absorbente de consenso total, en cambio el estado final de nuestro sistema puede ser uno de consenso total en cualquiera alguna de las dos opiniones, o puede ser un estado de máximo disenso, donde opiniones opuestas se alternan sobre los sitios de la cadena.

En esto último, los dos vecinos de cada agente con opinión $+1$ tienen opinión -1 y viceversa. El panel derecho de la Fig. 3.1 muestra la evolución de una porción de 200

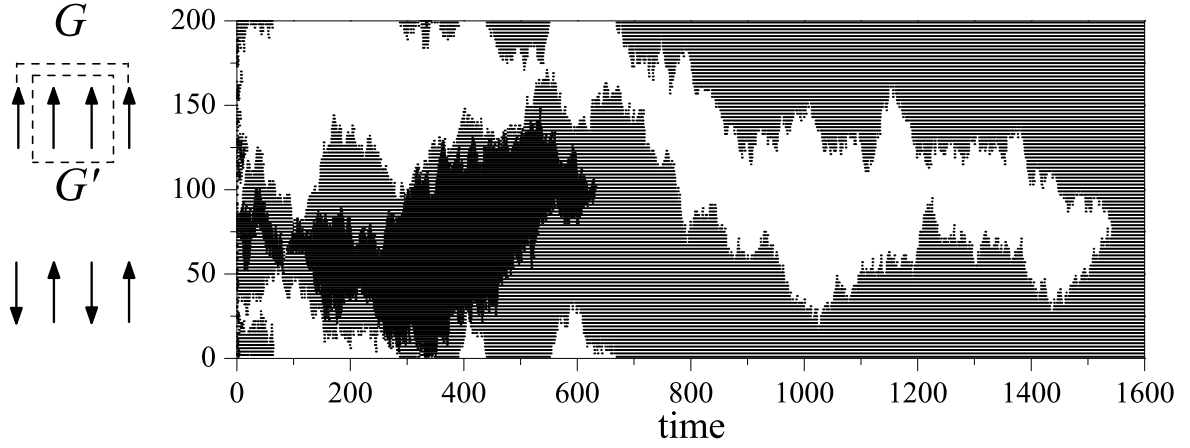


Figura 3.1: Izquierda: Los dos posibles resultados de la interacción, luego de la inversión de opinión, para cuatro agentes consecutivos en una cadena unidimensional. Los grupos activo y de referencia, G y G' , están respectivamente formados por los agentes más exteriores y los agentes centrales. Derecha: Evolución temporal de una porción de 200 agentes tomados de una cadena de $N = 10^3$. Con $n_+(0) = 0,55$ y $p_D = p_C = 1$. Los puntos negros y blancos corresponden, respectivamente, a las opiniones $+1$ y -1 . A pesar de que al tiempo $t = 10^4$ no se ha alcanzado ningún estado absorbente, la mayor parte de la región mostrada en el gráfico, se encuentra en un disenso global. Nota: A tiempos largos, las líneas horizontales blancas y negras de la figura se intercalan unas a otras en el estado final de disenso. Éstas al ser poco resolubles para el graficador, pueden crear la sensación de algún patrón distinto al mencionado. Tenga en cuenta el lector que esto es solo un efecto óptico.

agentes de una cadena de 10^3 agentes para $p_D = p_C = 1$, los puntos negros y blancos respectivamente corresponden a opiniones $+1$ y -1 .

A cualquier momento dado, la población es dividida en dos dominios bien definidos, cada uno de consenso en una opinión en una de las opiniones o desacuerdo. Cabe notar que en los límites del dominio se ve el típico movimiento difusivo que se encuentra en los procesos estocásticos de coarsening [1, 15].

Teniendo en cuenta que en el modelo del votante la probabilidad de terminar con consenso total de opinión $+1$, está dado por la fracción inicial de agentes con esa opinión, $n_+(0)$, y suponiendo que la distribución inicial de opiniones es homogénea sobre la cadena, la probabilidad de que nuestro sistema termine en un estado de consenso total en cualquiera de las opiniones es $P_{\text{cons}} = n_+^2(0) + n_-^2(0) = 1 - 2n_+(0) + 2n_+^2(0)$. Se puede notar que ésta coincide con la probabilidad de que, en el estado inicial, cualquier grupo de dos agentes contiguos estén en estado de consenso local. Además, se sabe que el tiempo necesario para alcanzar un estado absorbente en modelo del votante unidimensional es proporcional a N^2 , un resultado que también se debería mantener en nuestro caso.

El panel superior de la Fig. 3.2 muestra los resultados numéricos para la probabilidad final de consenso total P_{cons} , determinada como la fracción de realizaciones que terminan en consenso total de 10^3 realizaciones, como función de $n_+(0)$ y para varios

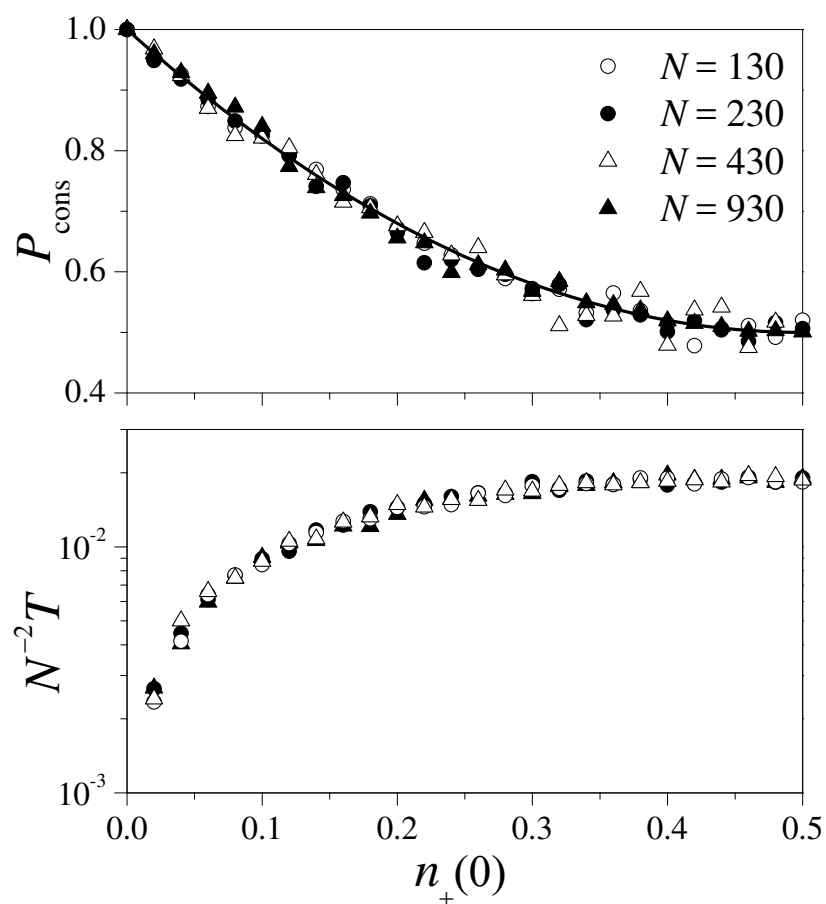


Figura 3.2: Resultados numéricos para la propagación de consenso y disenso en una cadena unidimensional con $p_D = p_C = 1$, obtenida de 10^3 realizaciones por cada set de parámetros (ver el texto para más detalles). Arriba: probabilidad de alcanzar consenso total, P_{cons} , como una función de la fracción inicial de agentes con opinión +1, $n_+(0)$, para cuatro valores distintos del tamaño del sistema N . Abajo: Tiempo total T necesario para alcanzar el estado absorbente final, normalizado por el cuadrado del tamaño del sistema N^2 . Dado que tanto P_{cons} como $N^{-2}T$, son simétricos respecto a $n_+(0) = 1/2$, se muestra solo la mitad del eje horizontal del gráfico.

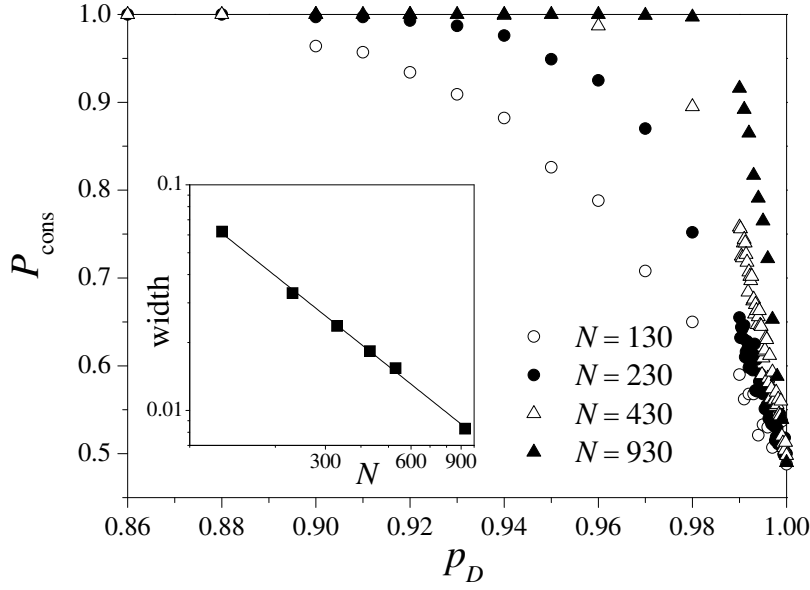


Figura 3.3: Probabilidad de alcanzar consenso total, P_{cons} , como función de la probabilidad p_D , con $p_C = 1$ y para cuatro valores distintos del tamaño del sistema N . Los resultados fueron obtenidos promediando sobre 10^3 realizaciones para cada conjunto de parámetros. Inset: Ancho del rango de variación de P_{cons} como función de N . La línea recta tiene una pendiente de -1 .

tamaños del sistema N . La curva es la predicción analítica dada más arriba. El resultado es análogo al de la probabilidad de consenso final hallado para un modelo tipo Sznajd [13].

El panel inferior muestra el tiempo total T necesario para alcanzar el estado absorbente final (de consenso o total a máximo disenso), promediado sobre 10^3 realizaciones y normalizado por N^2 . Como se esperaba, ambos tanto P_{cons} como $N^{-2}T$ son independientes del tamaño del sistema.

Cuando $p_D \neq p_C$, las dos subpoblaciones intercaladas ya no pueden ser consideradas independientes unas de otras. Si $p_D < p_C$, por ejemplo, una opinión predominante en una de las subpoblaciones invadirá la otra subpoblación más rápido que la opinión contraria, eso favorece el establecimiento del consenso colectivo. Para analizar esta situación asimétrica, se fijó $p_C = 1$ y se fue variando p_D en $(0, 1)$, tal que la propagación de consenso sea más probable que la de disenso. El gráfico principal de la Fig. 3.3 muestra los resultados numéricos para P_{cons} , medido como se explica más arriba, como una función de p_D y para cuatro valores de N . En todas las realizaciones, $n_+(0) = 0,5$, y las dos opiniones fueron distribuidas homogéneamente sobre el total de la población de agentes. A medida que p_D se hace menor a 1, la probabilidad de alcanzar consenso total crece rápidamente, acercándose a $P_{\text{cons}} = 1$. Además, a medida que N crece, el cambio en P_{cons} es más abrupto. Ajustando una función sigmoideal a los datos de P_{cons} vs. p_D cerca de $p_D = 1$, es posible asignar un ancho al rango de la curva donde P_{cons} cambia entre 1 y 0,5. El inset que se muestra en la Fig. 3.3 muestra este ancho como

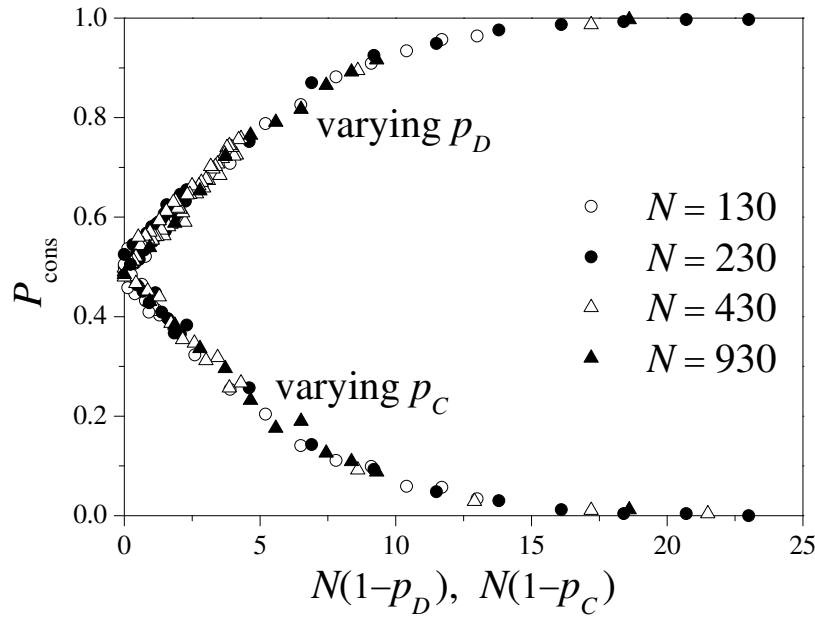


Figura 3.4: Probabilidad de alcanzar consenso total, P_{cons} , como función de $N(1-p_D)$ cuando se varia p_D con $p_C = 1$, y como función de $N(1-p_C)$ cuando se varia p_C con $p_D = 1$.

una función del tamaño del sistema N en un gráfico doble logarítmico. La pendiente del ajuste lineal es $-1,00 \pm 0,02$. Por lo tanto, el ancho es inversamente proporcional a N .

El hecho de que $P_{\text{cons}} = 0,5$ para $p_D = 1$ y para todo N , y que el ancho del rango donde P_{cons} cambia decreciendo como N^{-1} , hace posible conjeturar la existencia de una función $\Phi(u)$, con $\Phi(0) = 0,5$ y $\Phi(u) \rightarrow 1$ para valores grandes de u , tal que $P_{\text{cons}} = \Phi[N(1-p_D)]$. Para testear esta hipótesis, en la Fig. 3.4 se graficaron los resultados numéricos para P_{cons} contra $N(1-p_D)$. Los resultados de esto se pueden ver en la parte de arriba del gráfico (“variando p_D ”). El colapso de los datos para diferentes valores de N en una curva única confirma la conjetura. Un resultado análogo fue obtenido fijando $p_D = 1$ y variando p_C . Ahora bien, P_{cons} cae hasta 0 en un intervalo estrecho para p_C justo debajo de 1, indicando la prevalencia del disenso. Otra vez, el ancho del intervalo es proporcional a N^{-1} . El resultado en la mitad inferior de la Fig. 3.4 (“variando p_C ”) muestra el colapso del correspondiente valor de P_{cons} cuando se lo grafica contra $N(1-p_C)$.

En nuestras realizaciones numéricas con $p_D \neq p_C$ se guarda la información del tiempo promedio T necesario para alcanzar el estado absorbente final. La Fig. 3.5 muestra los resultados para $N^{-2}T$ en el caso donde $p_C = 1$ y p_D cambian. En contraste con el caso con $p_D = p_C = 1$, el escaleo del tiempo T con N^2 deja una discrepancia residual entre resultados para diferentes tamaños del sistema N . Específicamente, para $p_D < 1$, T crece más rápido que N^2 . Además, T es una función no monótona de p_D , exhibiendo un mínimo que cambia hacia $p_D = 1$ cuando N crece. La misma dependencia con N y

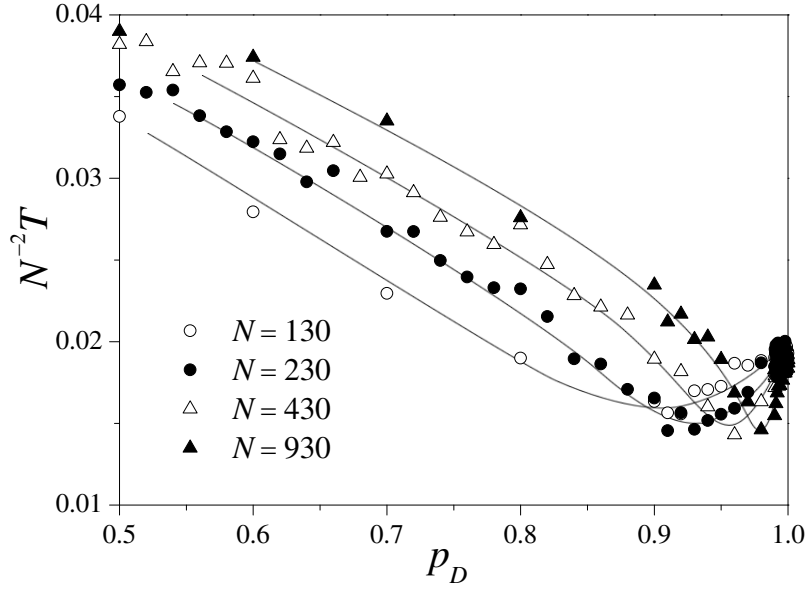


Figura 3.5: Tiempo total T necesario para alcanzar el estado absorbente final, normalizado por el cuadrado del tamaño del sistema N^2 , como una función de la probabilidad p_D ($p_C = 1$). Se han graficado curvas tipo Bézier como una guía para el ojo del lector.

p_C se observa cuando se deja fijo $p_D = 1$ y se varia p_C .

En resumen, los resultados obtenidos para una cadena unidimensional con grupos de dos agentes muestran que la posibilidad de que tanto el consenso como el disenso se propague sobre el sistema, hace posible encontrar estados colectivos absorbentes de consenso total, con todos los agentes compartiendo la misma opinión, o de máximo disenso, donde opiniones opuestas se alternan consecutivamente entre agentes vecinos. Para grandes poblaciones la prevalencia relativa de consenso y disenso colectivo es controlada por como las probabilidades p_D y p_C se comparan entre sí. Nuestros resultados sugieren que en el límite de $N \rightarrow \infty$, la condición $p_C > p_D$ unívocamente conduce a la dinámica hacia consenso total y viceversa. No obstante, para tamaños pequeños el sistema puede acercarse a consenso total si $p_D > p_C$, y viceversa, presumiblemente debido a fluctuaciones ocasionadas por el tamaño finito del sistema.

3.2. Grupos más grandes en una red cuadrada

Una versión bidimensional del modelo descrito en la sección anterior, donde los agentes ocupan una red regular cuadrada de $N = L \times L$ sitios con condiciones periódicas de contorno, puede definirse como lo siguiente. El grupo de referencia G' en cada interacción es elegido a la azar como un bloque de agentes 2×2 . El grupo activo G correspondiente, queda determinado por los ocho vecinos que rodean al bloque de agentes G' .

De las dieciséis configuraciones posibles de opinión del grupo de referencia, dos

corresponden al consenso total, cuando los cuatro agentes comparten la misma opinión, y seis se corresponden con el disenso máximo, con dos agentes en cada valor de opinión. Las ocho configuraciones remanentes, corresponden a consenso parcial, con solo un agente en desacuerdo con el resto. Las reglas de la dinámica son las siguientes: (1) si G' se encuentra en consenso total, todos los agentes de en G adoptan la opinión del grupo de referencia; (2) si G' se encuentra en máximo disenso, cada agente en G adopta la opinión opuesta de su vecino del grupo de referencia más cercano; (3) en cualquier otro caso, nada sucede. Por lo tanto, tanto el consenso como el disenso se propagan hacia afuera del grupo de referencia. Las probabilidades p_D y p_C para la propagación de disenso y consenso se introducen de la misma manera que en el caso unidimensional. La parte izquierda de la Fig. 3.6 muestra, a menos de rotaciones e inversiones de opinión, los tres posibles resultados de un evento de interacción.

El estados de consenso colectivo total, con todos los agentes de la población compartiendo la misma opinión, y de máximo disenso colectivo, con dos opiniones alternando sitio a sitio a lo largo de cualquier dirección en la red, son los estados absorbentes que se corresponden con el caso unidimensional. Sin embargo, para $p_D = p_C = 1$, el sistema no puede ser reducido como antes a una colección de subredes gobernadas por el modelo del votante. La definición de G y G' establece ahora correlaciones entre el cambio de opinión en el grupo activo a cada interacción. Además, algunas configuraciones de opinión en el grupo de referencia induce evolución en el grupo activo, mientras otras no lo hacen. La figura 3.6 muestra, a su derecha, cuatro fotos de una población de 120×120 agentes, a lo largo de una realización iniciada con $n_+(0) = 0,35$ y $p_D = p_C = 1$. Es de notar la formación de grupos de consenso en una etapa temprana, y la prevalencia final del disenso. Las líneas de borde entre regiones de disenso son también dignas de mención.

Siguiendo las mismas ideas de lo hecho para la cadena unidimensional, se estudió en principio la probabilidad P_{cons} de alcanzar consenso colectivo total como función de la fracción inicial de agentes con opinión $+1$, $n_+(0)$, en el caso de $p_D = p_C = 1$. Las opiniones fueron distribuidas en el instante inicial de manera homogénea para toda la población. Por una fracción muy pequeña de $n_+(0)$, encontramos de manera esperada $P_{\text{cons}} \approx 1$. Sin embargo en contraste con el caso unidimensional (ver Fig. 3.3), P_{cons} permanece cercana a su máximo valor hasta $n_+(0) \approx 0,35$, donde cae abruptamente a $P_{\text{cons}} \approx 0$. El ancho de la zona de transición decrece como una potencia no trivial del tamaño del sistema, $\sim L^{0,83 \pm 0,04}$, tal como se ilustra en el insert de la Fig. 3.7. Nuestra mejor estimación del valor crítico de $n_+(0)$ al cual P_{cons} cae es $n_+^{\text{crit}} = 0,353 \pm 0,001$. El gráfico principal en la figura muestra el colapso de las mediciones numéricas de P_{cons} como una función de $n_+(0)$ para diferentes valores del tamaño L , promediado sobre 100 realizaciones, cuando es graficada contra la variable reescalada $L^{0,83}[n_+(0) - 0,353]$.

Estos resultados sugieren que, para poblaciones muy grandes, la probabilidad de

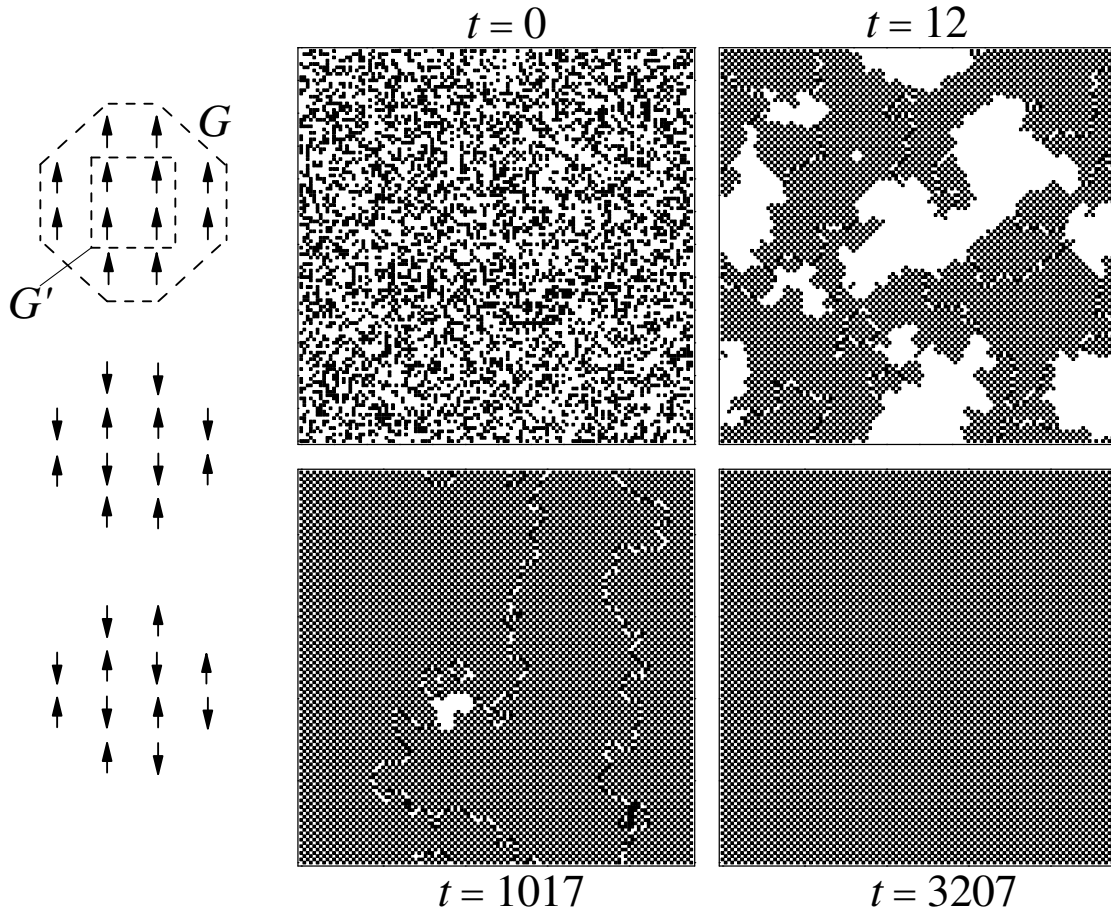


Figura 3.6: Izquierda: Los tres posibles resultados de la interacción, a menos de rotaciones e inversiones de opinión, en la red cuadrada bidimensional. El grupo activo G esta formado por los agentes más externos, y el grupo de referencia G' , esta formado por los agentes más internos. Derecha: cuatro fotos de la población con $L = 120$, para $n_+(0) = 0,35$ y $p_D = p_C = 1$, incluyendo la condición inicial y dos estados intermedios. Al tiempo $t = 3207$ se alcanza un estado absorbente de máximo disenso. Los puntos negros y blancos corresponden, respectivamente, a opiniones $+1$ y -1 . Nota: El estado final de disenso muestra un patrón tipo tablero de ajedrez. No obstante, al igual que en la figura 3.1, la falta de resolución del graficador puede mostrar patrones falsos, tengalo en cuenta el lector.

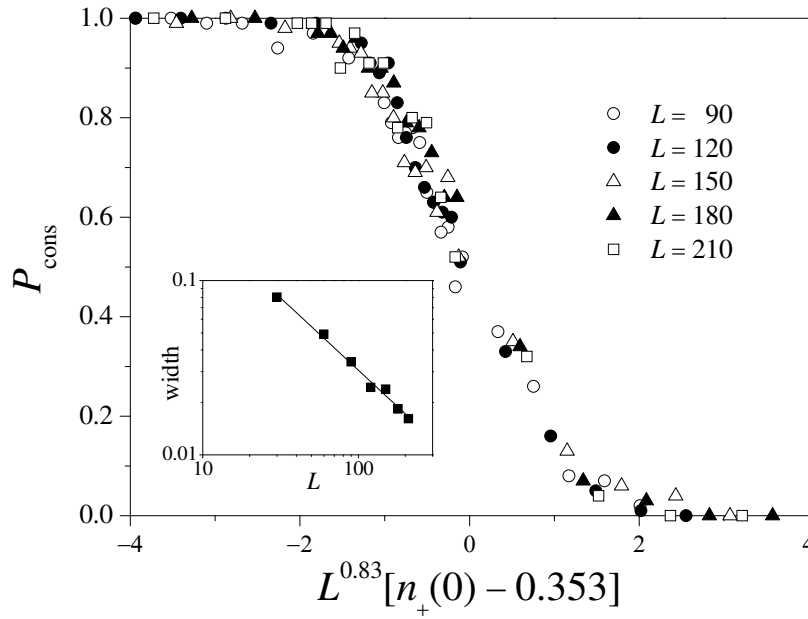


Figura 3.7: Resultados numéricos para la probabilidad de alcanzar consenso total, P_{cons} , en una red cuadrada bidimensional con $p_D = p_C = 1$, obtenida del promedio de 100 realizaciones por cada conjunto de parámetro. El colapso de las curvas para varios tamaños del sistema L , se obtuvo graficando P_{cons} against $L^{0.83}[n_+(0) - 0.353]$. Insert: Escalado del ancho en la zona de transición de P_{cons} , la misma fue determinada a partir del ajuste de las curvas con una función del tipo sigmoidal, para varios tamaños L . La línea recta tiene una pendiente de -0.83 .

alcanzar consenso total salta en forma discontinua desde $P_{\text{cons}} = 1$ a 0 para $n_+(0) = n_+^{\text{crit}}$. Y difiere del comportamiento suave e independiente del tamaño que del sistema que se observa en el caso unidimensional. Es de notar también que n_+^{crit} es cercano al valor $n_+(0) = 1/3$, pero no llega a ser coincidente. A este valor, y con una distribución inicial homogénea de opiniones, la probabilidad de encontrar un bloque de agentes 2×2 en estado de consenso, se vuelve menor a la de encontrar uno máximo disenso a medida que $n_+(0)$ crece.

En estas simulaciones, también fue medido el tiempo total promedio T , necesario para alcanzar el estado absorbente final. Los resultados de esto se muestran en la Fig. 3.8. Una vez más, en contraste con el caso unidimensional, T exhibe un cambio notable en el escaleo con el tamaño del sistema a medida que $n_+(0)$ se acerca al valor crítico n_+^{crit} .

Acerca de la dependencia de P_{cons} en la probabilidad de propagación de disenso p_D , con $p_C = 1$ y $n_+(0) = 0.5$, se encontró un comportamiento que cualitativamente refleja la del caso unidimensional, el mismo se muestra en la Fig. 3.3.

A medida que p_D decrece desde 1, P_{cons} crece desde 0 hasta 1 en un intervalo cuya anchura disminuye con el tamaño de la población. En el sistema bidimensional, la transición tiene lugar a una probabilidad crítica p_D^{crit} , que se puede discernir claramente desde $p_D = 1$. Nuestra estimación es $p_D^{\text{crit}} = 0.984 \pm 0.002$. Por otro lado, el escaleo

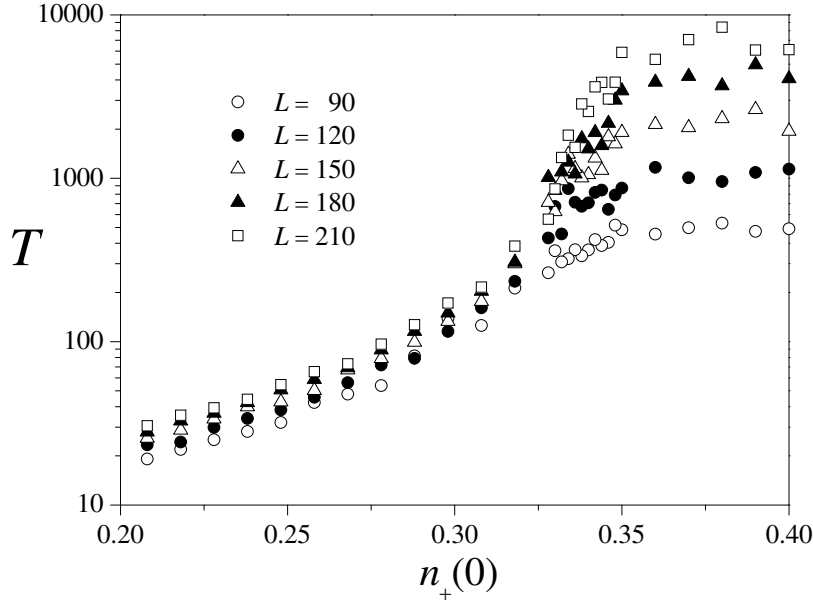


Figura 3.8: Tiempo total T necesario para alcanzar el estado absorbente final en una red cuadrada bidimensional, mostrada como función de $n_+(0)$ para diferentes valores de L .

del ancho de la transición con el tamaño del sistema, muestra un exponente crítico no trivial, y las curvas decreciendo como función de $L^{-0.93 \pm 0.05}$. El colapso de los resultados numéricos para varios tamaños del sistema, obtenidos a partir del promedio de 100 realizaciones, son mostrados en la Fig. 3.9, donde se ha graficado P_{cons} como una función de $L^{0.93}(0.984 - p_D)$. El insert muestra la dependencia tipo ley de potencia del ancho de la transición con el tamaño del sistema L . Resultados análogos se obtienen si se varía la probabilidad de propagación de consenso p_C , con $p_D = 1$.

Finalmente, se ha encontrado que la transición en P_{cons} como función de la probabilidad de disenso p_D muestra una dependencia en la fracción inicial de agentes con opinión +1. Para caracterizar este efecto en orden de resaltar la prevalencia relativa de disenso y consenso, se ha medido el valor de p_D a la cual $P_{\text{cons}} = 0.5$, como una función de $n_+(0)$. El plano de parámetro $s(n_+(0), p_D)$ resulta así dividido en regiones donde el estado final de consenso total es más probable que el de máximo disenso, y viceversa. Los resultados para una población de 120×120 agentes se muestran en la Fig. 3.10.

En resumen, la propagación de consenso y disenso en una red bidimensional cuadrada lleva a similitudes cualitativas con el caso unidimensional, no obstante la probabilidad de que la población alcance un consenso total colectivo en dos dimensiones muestra bastantes diferencias en la dependencia con el tamaño del sistema, en las condiciones iniciales y en la propagación de probabilidades. En particular, nuestros resultados revelan la existencia de un fenómeno crítico que involucra leyes de escalas con exponentes no triviales.

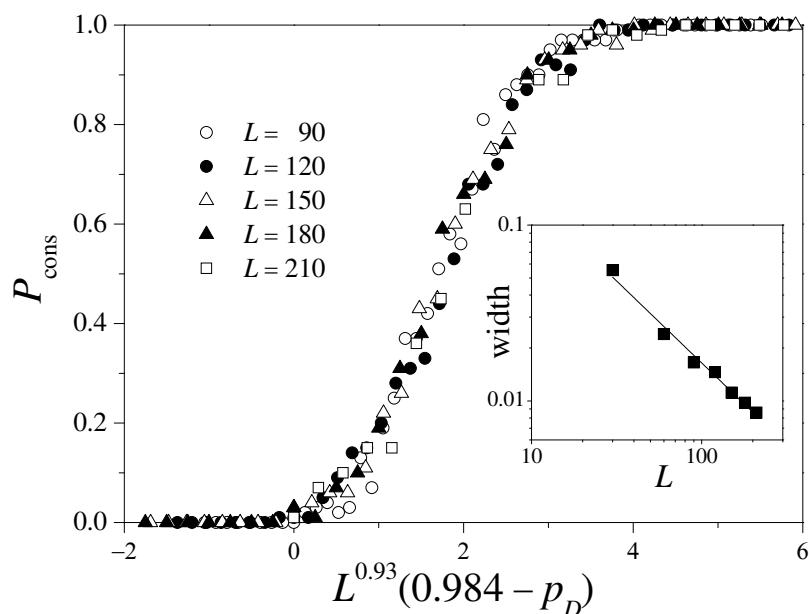


Figura 3.9: Colapso de los resultados numérico para la probabilidad de alcanzar consenso total , P_{cons} , en una red cuadrada bidimensional con $p_C = 1$ y $n_+(0) = 0,5$, para varios tamaños del sistema L cuando es graficado como función de $L^{0,93}(0,984 - p_D)$. Insert: Escaleo del ancho de la zona de transición de P_{cons} como función del tamaño del sistema, la línea recta tiene una pendiente de $-0,93$.

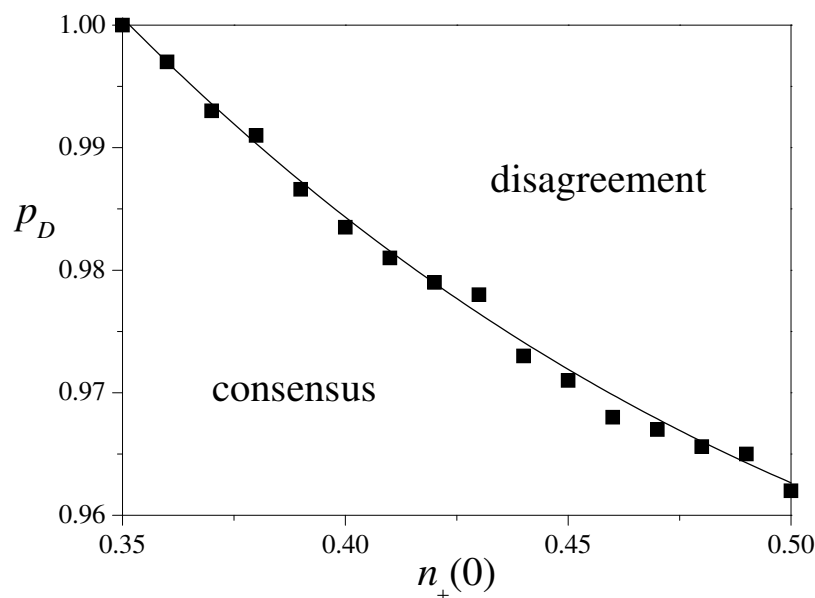


Figura 3.10: Zonas de relativa prevalencia de consenso total y máximo disenso en una red cuadrada bidimensional con $L = 120$, graficada en el plano de parámetros $(n_+(0), p_D)$. Los símbolos representan los resultados numéricos y las curvas son una guía para el ojo del lector.

3.3. Conclusiones

En este trabajo se ha considerado el surgimiento de opiniones colectivas en una población de agentes interactuantes donde las opiniones son transmitidas a través de la propagación de consenso y disenso local, desde un grupo hacia sus vecinos. En el modelo propuesto, la unidad básica de interacción no son los agentes, sino más bien pequeños grupos de agentes los cuales mutuamente comparan sus grados internos de consenso y modifican sus opiniones acorde a esto. En este sentido, se extiende el mecanismo básico subyacente en modelos que utilizan la regla de la mayoría y dinámicas tipo Sznajd [1, 8, 13], donde la opinión de cada agente individual cambia en respuesta al estado colectivo de un grupo de referencia. Es esperado que en sistemas sociales reales, la diseminación de opiniones individuales a través de la imitación entre agentes por un lado, y la propagación de consenso y disenso de grupos por el otro, sean mecanismos complementarios que simultáneamente den forma a la distribución de opiniones. En este trabajo, y con el objetivo de ganar visión acerca de este último efecto específico, se ha hecho foco en modelar solamente la propagación de consenso y disenso en grupos. El efecto combinado de los dos mecanismos es un problema que queda abierto a futuro.

Nuestras simulaciones numéricas se concentraron en dos modelos de opinión basados en la misma idea pero involucrando redes regulares de una y dos dimensiones [14]. En ambos casos, se han observado estados absorbentes con toda la población compartiendo la misma opinión (estado de consenso total) y con mitad de la población compartiendo una opinión, y la otra mitad compartiendo la otra (estado de máximo disenso). Los estados de máximo disenso son caracterizados por opiniones alternadas entre vecinos a lo largo de la red.

Una cantidad relevante para caracterizar el comportamiento observado es la probabilidad de alcanzar consenso total, como una función de la condición inicial (i.e. la fracción inicial de la población con cada opinión) y de la propagación de la probabilidad relativa de consenso y disenso. El tiempo total necesario para alcanzar un estado final absorbente, promediado sobre realizaciones, también ha sido medido como un parámetro para caracterizar la dinámica. Se ha encontrado en varios casos, que esas cantidades muestran un fenómeno crítico cuando los parámetros de control cambian con leyes de escalo tipo ley de potencias y como función del tamaño del sistema, lo cual apunta a la presencia de discontinuidades en el límite de poblaciones infinitas. Es interesante notar que si bien las leyes de escala son simples para el caso unidimensional, no lo son para el sistema bidimensional ya que en este último caso quedan involucrados exponentes y puntos críticos no triviales.

En los dos modelos analizados aquí, un aspecto que merece una exploración futura, es la interacción mutua de los dominios de opinión que se desarrollan desde el inicio de la dinámica (ver Figs. 3.1 y 3.6). Sin embargo, la extensión más interesante del

presente análisis debería ir en orden de incorporar estructuras sociales mas complejas. La interacción entre las reglas de la dinámica para la propagación de consenso y disenso y la topología de la estructura donde esta dinámica se propaga, podría provocar la aparición de nuevos fenómenos de auto organización colectiva.

Bibliografía

- [1] C Castellano, S Fortunato, V Loreto, *Statistical physics of social dynamics*, Rev. Mod. Phys. **81**, 591 (2009). [27](#), [28](#), [30](#), [40](#)
- [2] W Weidlich, *The statistical description of polarization phenomena in society*, Br. J. Math. Stat. Psychol. **24**, 251 (1971). [27](#)
- [3] R Holley, T Liggett, *Ergodic theorems for weakly interacting infinite systems and the voter model*, Ann. Probab. **3**, 643 (1975).
- [4] S Galam, Y Gefen, Y Shapir, *A mean behavior model for the process of strike*, J. Math. Sociol. **9**, 1 (1982).
- [5] S Galam, *Majority rule, hierarchical structures and democratic totalitarianism: a statistical approach*, J. Math. Psychol. **30**, 426 (1986). [27](#)
- [6] S Redner, *A Guide to First-Passage Processes*, Cambridge University Press, Cambridge (2001). [27](#)
- [7] K Starkey, Ch Barnatt, S Tempest, *Beyond networks and hierarchies: latent organization in the UK television industry*, Org. Sci. **11**, 299 (2000). [28](#)
- [8] P Kaprivsky, S Redner, *Dynamics of majority rule in two-state interacting spin systems*, Phys. Rev. Lett. **90**, 238701 (2003). [28](#), [40](#)
- [9] J Johnson, *Multidimensional events in multilevel systems*, In: The Dynamics of Complex Urban Systems, Eds. S Alberverio et al., p. 311, Physica-Verlag, Heidelberg (2008).
- [10] D H Zanette, *Beyond networks: opinion formation in triplet-based populations*, Phil. Trans. R. Soc. A **367**, 3311 (2009). [28](#)
- [11] D H Zanette, *A note on the consensus time of mean-field majority-rule dynamics*, Pap. Phys. **1**, 010002 (2009). [28](#)
- [12] D G Hernández, D H Zanette, *Evolutionary dynamics of resource allocation in the Colonel Blotto game*, J. Stat. Phys. **151**, 623 (2013). [28](#)

- [13] K Sznajd-Weron, J Sznajd, *Opinion evolution in closed community*, Int. J. Mod. Phys. C **11**, 1157 (2000). [28](#), [32](#), [40](#)
- [14] D Stauffer, A O Sousa, S M de Oliveira, *Generalization to square lattice of Sznajd sociophysics model*, Int. J. Mod. Phys. C **11**, 1239 (2000). [28](#), [40](#)
- [15] A Bray, *Theory of phase-ordering kinetics*, Adv. Phys. **43**, 357 (1994). [30](#)

Capítulo 4

Formación de opinión guiada por influencia social: De un experimento al modelado

El estudio de las interacciones sociales en poblaciones humanas apunta a proveer una descripción científica de la dinámica de relación entre nuestros iguales, lo cual es probablemente el más intrincado y significativo aspecto del comportamiento humano. Sería difícil poder estimar la relevancia que la caracterización sistemática de los procesos sociales y sus mecanismos subyacentes, tiene en el entendimiento de nuestra propia naturaleza como miembros de una comunidad. Además, este interés ha alcanzado dominio fuera de las ciencias básicas, apuntando a cuestiones cruciales para todo tipo de organización y planeamiento social, desde el nivel diario de contacto interpersonal, hasta políticas, estrategias y economías regionales y globales.

La dinámica de formación de opinión es probablemente el tema favorito en el estudio de los fenómenos sociales, primeramente debido al interés en predecir comportamientos colectivos con base en posturas personales y sus influencias mutuas. En contraste con los procesos de toma de decisión, los cuales pueden pensarse asociarse a eventos localizados en el tiempo, la formación de opinión involucra una evolución progresiva que, a niveles individuales, puede persistir indefinidamente mientras las opiniones cambian según varios efectos. Las características específicas de la formación de opinión, lo hacen un buen candidato para modelar una dinámica basada en la representación matemática de las opiniones individuales y de los mecanismos de influencia social que producen esos cambios. Además, este tipo de modelos puede ser extendido fácilmente a fenómenos sociales en los cuales, al igual que en formación de opinión, están gobernados por una interacción adecuadamente definida. Algunos ejemplos, entre otros, pueden ser la adopción de rasgos culturales [1], la evolución del lenguaje [2], y la innovación tecnológica [3].

Durante las últimas dos décadas, una multitud de modelos de formación de opinión han aparecido en la literatura [4]. Una característica común a su inmensa mayoría es la muy estilizada, casi aproximación metafórica al fenómeno social en estudio, y al mismo tiempo, la estrecha relación con los sistemas físicos bien conocidos. Por ejemplo, en modelos en los cuales las opiniones tienen valores discretos, representando situaciones como en una elección partidaria, han sido típicamente desarrollados de manera análoga a los sistemas de espín, con la influencia social representada por algún tipo de interacción entre espines [5–7]. Así mismo, la dinámica de opiniones continuas, ha sido a su vez modelada como procesos cinéticos gobernados por ecuaciones de transporte [8]. Esto también sucede con el modelado de poblaciones de agentes en movimiento, que también han sido representados como sistemas físicos cinéticos [9].

Las herramientas de la mecánica estadística de equilibrio y no equilibrio proveen aproximaciones extremadamente eficientes para tratar con esos modelos sociales inspirados en la física. En muchos casos fue posible obtener soluciones analíticas exactas y aproximadas, y por otro lado resultados numéricos robustos para varios tipos de mecanismos de interacción y un número diverso de topologías [4]. Al mismo tiempo, y tal vez no inesperadamente, la conexión entre estos modelos y la vida social real, se vuelve débil. En su “llamada por vínculos más estrechos con la realidad” [10], Sobkowicz repasa una extensa bibliografía de modelos de formación de opinión, resaltando el hecho de que solo una pequeña fracción de estos, establece conexiones cuantitativas con datos reales. Los vínculos sistemáticos entre modelos y mediciones originales parecen haber sido evaluado sólo en unos pocos casos, como en resultados electorales [11–13] y en ambientes de colaboración [14, 15].

Solo muy recientemente la misma comunidad científica que desarrolló el cuerpo de modelos teóricos descritos arriba ha emprendido el diseño y realización de experimentos controlados con la idea de complementar y dar soporte empírico a estos modelos [16–18]. La idea subyacente en el dominio de experimentos psicológicos [19, 20], consiste en cuantificar el cambio de opinión dado por un sujeto en una cuestión específica como el resultado de un evento de exposición a diferentes opiniones. En lo básico de esta misma idea, en este trabajo se reporta el resultado de una variante a un experimento recientemente propuesto [18], donde no solo el cambio de opinión, si no también la variación de confianza que el sujeto asigna a sus opiniones, es cuantificada y medida.

Además comparando los resultados obtenidos con la versión previa del experimento, con el cual encontramos significativas similitudes y diferencias, nuestro foco es puesto es obtener estimaciones realistas para parámetros que puedan luego ser usados para mejorar los modelos de formación de opinión. En particular estamos interesados en evaluar los grados de influencia que la exposición a información contrastante pueda tener en la revisión de la opinión, y como esa influencia es modulada por los respectivos niveles de confianza. Se usaron los resultados de los experimentos para determinar

parámetros en un modelo teórico de formación de opinión basado en agentes, guiado por influencia mutua de los individuos en la población, y se corrieron varias (ilustrativas) simulaciones las cuales también incluyen el concepto de “líderes de opinión”. También se reportan para nuestro modelo, resultados analíticos sobre la evolución y la distribución estacionaria de opiniones.

4.1. Descripción del experimento

Durante el experimento, el cual fue realizado en presencia de un supervisor, cada uno de los sujetos debía contestar 20 preguntas que sucesivamente iban apareciendo en la pantalla de una computadora. En todas las preguntas podía darse una precisa respuesta cuantitativa, accesible a través del sentido común o del conocimiento general. Sin embargo, se esperaba que los sujetos tuvieran solo una idea aproximada del valor preciso de la pregunta, para que sus respuestas fueran dadas a partir de conjeturas y/o estimaciones. Por ejemplo, una pregunta era: *En promedio, ¿cuántos litros de agua gasta una persona adulta al bañarse?*

Llegado el caso, la pregunta explicitaba en cuales unidades debía darse la respuesta. Las 20 preguntas (listadas en el apéndice 4.7) fueron las mismas para todos los sujetos, pero fueron sorteadas al azar para cada uno, con la idea de evitar posibles correlaciones sistemáticas entre respuestas sucesivas. El cuestionario cubría una amplia variedad de temas, y fue formulado teniendo en cuenta que los potenciales sujetos eran habitantes con mucho tiempo en la República Argentina. El experimento constaba de dos rondas. En la primera, el sujeto fue invitado a escribir consecutivamente las respuestas y al mismo tiempo, a marcar su nivel de confianza en cada pregunta dada, lo cual se hacia en una escala de 0 a 5 (de menor a mayor confianza). En la segunda ronda, lo cual tuvo lugar inmediatamente después de la primera, se les presentaron de nuevo las mismas 20 preguntas. Pero ahora, el sujeto fue provisto de información adicional, la cual consistía de una respuesta de referencia para cada una de las preguntas. En la mitad de los casos (preguntas del tipo A), se dijo que la respuesta de referencia era dada por un participante anterior, informándose también la confianza. En la otra mitad (preguntas del tipo B) se dijo que las respuestas de referencia eran el promedio de un grupo de previos participantes, en este caso no se daba un nivel de confianza. En realidad, las respuestas de referencia fueron generadas tomando un valor al azar que no difiera en más del 20 % del valor real de la pregunta. Para las preguntas tipo A, los niveles de confianza fueron generados uniformemente al azar en el rango de 0 a 5. En todos los casos, la respuesta y el nivel de confianza que el participante daba en la primer ronda, se mostraba en la segunda. El sujeto fue invitado a responder cada una de las preguntas y a nivelar su confianza otra vez, con la posibilidad de revisar los valores anteriormente dados. El programa con el cual se realizo el experimento, asignaba automáticamente

un código de identificación anónimo para cada sujeto y guardaba las respuestas y los niveles de confianza para cada una de las preguntas en las dos rondas.

El experimento fue llevado a cabo sobre un grupo de 85 estudiantes de grado de carreras de ingeniería y ciencias de dos universidades públicas de Argentina: La Universidad Nacional de San Luis y la Universidad Nacional de Cuyo. Con esto se espera que el nivel educativo de los participantes sea razonablemente homogéneo. También se guardaron las edades y el género de los participantes, con su consentimiento, pero esto no fue utilizado en el análisis de los resultados.

En forma individual, a cada sujeto se le informó acerca del procedimiento del experimento y se lo instruyó para realizarlo. Se les dijo que el experimento estaba orientado a estudiar el “Intercambio de información en grupos”, sin hacer mención explícita de “formación de opinión” o “influencia social”. Los participantes fueron todos voluntarios sin ninguna recompensa monetaria.

Cabe destacar que el procedimiento experimental descripto en esta sección fue aprobado por el Comité de Ética del Instituto Balseiro, Universidad Nacional de Cuyo. Todos los participantes dieron su consentimiento por escrito para su participación.

4.2. Acerca del procesamiento de los datos

Varias observaciones empíricas de conjeturas por parte de grupos de personas en diferentes situaciones controladas [21], incluyendo la versión previa del presente experimento [18], sugieren que el conjunto de respuestas cuantitativas acerca de una dada pregunta debería obedecer a una distribución lognormal, o de manera equivalente, que los logaritmos de las respuestas están normalmente distribuidos.

Sin embargo un riguroso análisis estadístico, realizado con la técnica de Kolmogorov - Smirnov, para testear los resultados de nuestro experimento, no puede dar soporte a esa suposición (como referencia, las distribuciones de las respuestas en la primer ronda se muestra en el apéndice 2), no obstante los logaritmos de las respuestas siguen una distribución tipo campana, de cola corta y aproximadamente simétrica, tal como se muestra en la fig 4.1. Es por lo tanto, ventajoso trabajar con los logaritmos de las respuestas en lugar de con los valores originales, tal como explicaremos en las líneas siguientes. Entonces, por cada pregunta a introducimos $r = \log a$ como el dato experimental relevante, al cual para simplificar llamaremos la “opinión” asociada a esa respuesta.

A pesar de no ser estrictamente Gausiana, la distribución tipo campana de opinión puede ser adecuadamente descripta por su valor medio y su desviación estándar. Además, la diferencia de dos opiniones, la cual coincide con el cociente de las respectivas respuestas, es un valor adimensional independiente de las unidades en la cual fue expresada la respuesta. Esto hace que sea conveniente cuantificar la influencia so-

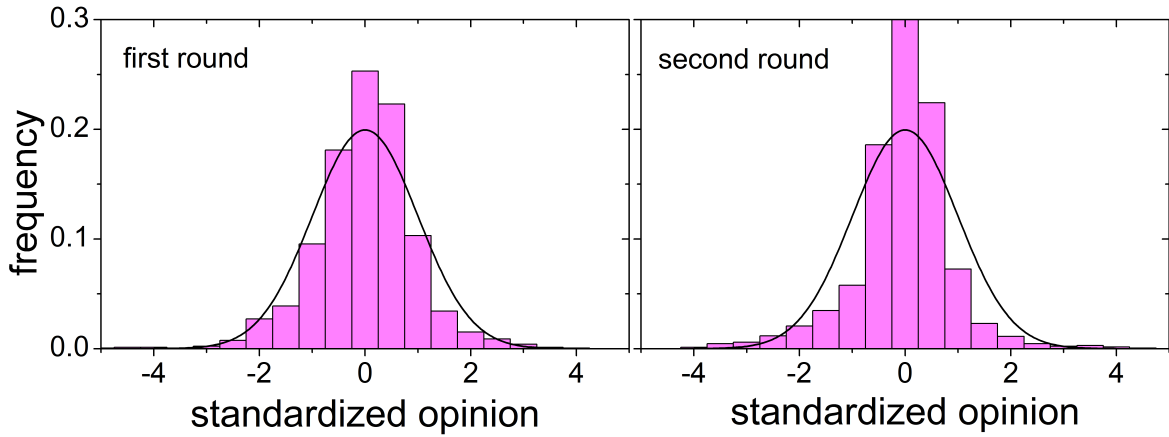


Figura 4.1: Los histogramas incorporan las respuestas de todos los participantes en las dos rondas. La distribución de opiniones para cada respuesta fue estandarizada tomando sus valores medios y reescalando por sus desviaciones estándar. Las curvas corresponden a una distribución normal con valor medio cero y desviación estándar unidad.

cial como el promedio de las diferencias de opiniones, ya que la cuantificación se vuelve independiente de la escala de la respuesta, lo cual permite comparar directamente entre resultados de diferentes preguntas. Sin embargo, independientemente de la elección de unidades, la dispersión relativa de opinión puede todavía variar entre preguntas. Si fuera necesario, la dispersión puede ser normalizada re escalando las opiniones de cada una de las preguntas por sus desviaciones estándar, como se hizo en la figura 4.1.

La comparación de opiniones individuales con sus valores medios y sus desviaciones estándar para cada una de las preguntas fue usada para detectar respuestas muy aisladas del resto (outliers). Como criterio, identificamos como outliers a aquellas opiniones que difieren del valor medio en más de tres veces la desviación estándar. Del total de las $85 \times 20 = 1700$ respuestas, 56 fueron descartadas con este criterio. El análisis de los resultados fue hecho sobre el resto de las 1644 respuestas, 804 que correspondían a las preguntas de tipo A, y 840 a las del tipo B.

Para caracterizar el cambio de opinión en una pregunta dada, de r en la primera ronda a r' en la segunda, y con respecto a la opinión de referencia r_R presentada en la segunda ronda, primero calculamos la diferencia de opinión inicial $\delta r = r - r_R$ y el cambio de opinión dado por $\Delta r = r' - r$. A partir de esto definimos el factor de influencia I como:

$$I = -\frac{\Delta r}{\delta r} = \frac{r' - r}{r_R - r}, \quad (4.1)$$

el cual indica cero cuando la opinión no cambia en las dos rondas ($r' = r$), e indica uno cuando el individuo adopta la opinión de referencia ($r' = r_R$). Si la nueva opinión r' es un compromiso entre r y r_R , entonces $0 < I < 1$. Se enfatiza que el factor de influencia es independiente no solo de las unidades en la cual fue dada la respuesta, sino también de la dispersión del conjunto de opiniones correspondientes a una dada pregunta. Esto

hace que I pueda ser comparado con seguridad entre preguntas.

Para la caracterización de la confianza, llamamos c y c' a los niveles asignados por el sujeto, en la primer y segunda ronda respectivamente, en cada una de las preguntas. En el caso de las preguntas del tipo A, llamamos c_R a la confianza de referencia dada en la segunda ronda. Estas tres cantidades son números enteros entre 0 y 5. En nuestro análisis se pone el foco en análisis del cambio de confianza $\Delta c = c' - c$, y la diferencia de confianza con la respuesta de referencia $\delta c = c - c_R$. Ambas diferencias pueden variar entre -5 y 5 .

4.3. Resultados del experimento

El par de respuestas dada por cada sujeto en cada una de las preguntas, cae dentro de tres categorías distintas. La primera corresponde a las respuestas donde los sujetos mantienen su opinión sin cambios entre rondas, en este caso el factor de influencia es $I = 0$, o reaccionando respecto a la respuesta de referencia aumentando la diferencia con esta, lo cual implica $I < 0$. En el otro extremo, el sujeto adopta la opinión de referencia ($I = 1$), o sobre reacciona a la influencia, adoptando una opinión mayor a la de referencia dada ($I > 1$). En la tercera categoría, la segunda ronda es un compromiso entre la opinión inicial y la opinión de referencia, en términos del factor de influencia: $0 < I < 1$. Esas tres categorías han sido identificadas en la versión previa a nuestro experimento [18], aunque ningún caso con $I < 0$ o $I > 1$ fue reportado. En nuestra realización, las reacciones extremas con $I < 0$ o $I > 1$ sumaron el 3,9% del total de respuestas.

La Fig. 7.1 muestra histogramas de los valores obtenidos para I en los tipos de preguntas, tipo A y B con influencia tipo individual y grupal. Para compactar, los histogramas incorporan a las columnas asignadas con $I = 0$ y $I = 1$ a aquellas preguntas que $I \leq 0$ y $I \geq 1$, respectivamente. La frecuencia con la cual la opinión inicial es mantenida sin cambios (f_K , dada por la columna mas alta a $I = 0$) esta debajo de 50 % para ambos tipos de pregunta. Mantener la opinión es entonces el comportamiento medido más común [18]. En cambio, adoptar la opinión de referencia es la categoría con la más baja frecuencia $f_A = 14\%$ para preguntas del tipo A y 9% para preguntas del tipo B. Finalmente, la frecuencia de opiniones tipo compromiso alcanza $f_C = 25\%$ y 38% . Los valores correspondientes de I son mas o menos dispersados en el intervalo $(0, 1)$, sin embargo parece observarse una tendencia hacia valores grandes, con un promedio cercano a $I = 0,6$ en ambos tipos de preguntas.

A pesar de las similitudes cualitativas entre los resultados para los dos tipos de preguntas, un test de Kolmogorov-Smirnov muestra que sus diferencias estadísticas son significativamente altas ($p < 0,001$). La diferencia sugiere que en el caso de influencia individual los sujetos tienden a adoptar actitudes más extremistas ante la potencial

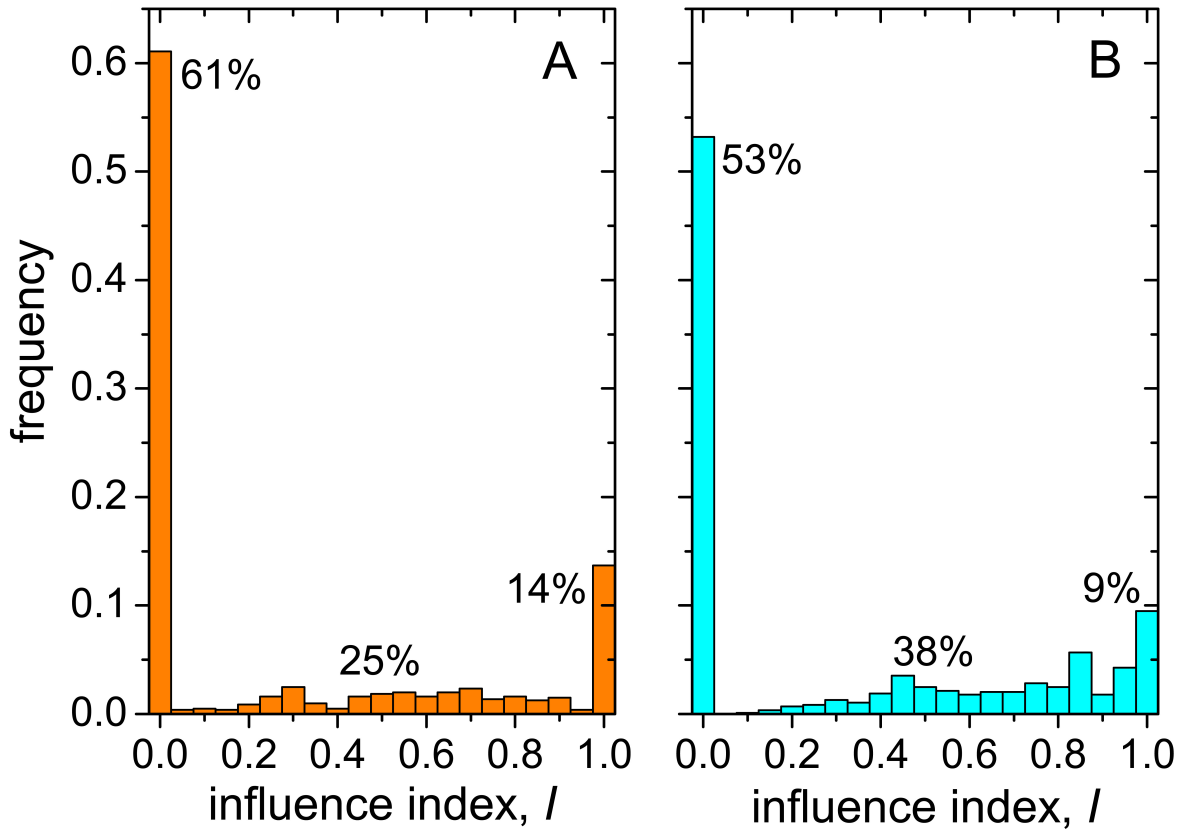


Figura 4.2: Distribución del factor de influencia. Los histogramas muestran la frecuencia del factor de influencia I medido en el experimento. Los porcentajes indican la frecuencia de las preguntas donde la opinión se mantiene sin cambios ($I = 0$), donde se adopta la respuesta de referencia ($I = 1$) y donde se alcanza un compromiso ($0 < I < 1$). Las columnas correspondientes a $I = 0$ y $I = 1$ incorporan las respuestas con $I < 0$ y $I > 1$ respectivamente. A: Influencia individual (preguntas del tipo A). B: Influencia grupal (preguntas tipo B)

influencia de sus opiniones, ya sea resistiendo o recibiendo influencia con mayor frecuencia. En el caso de influencia grupal, hacer un compromiso es considerablemente más frecuente, pero aún sin representar un comportamiento dominante.

Para analizar la conexión entre la influencia y la confianza, nos centramos en las preguntas de tipo A, para las cuales se tiene un nivel de confianza disponible. En primer término se estudio como las tres categorías de preguntas (mantener, adoptar y hacer un compromiso) son determinadas por la opinión de referencia $\delta r = r - r_R$ y la diferencia de confianza $\delta c = c - c_R$. Cada punto en la Fig. 4.3 A representa un par de respuestas, con su respectiva categoría codificada por un color (también se usaron diferentes tamaños para discernir entre puntos superpuestos). Sus coordenadas fueron dadas por los correspondientes δr y δc . Las tres elipses están centradas en las coordenadas promedio de las tres categorías y sus ejes están orientados a lo largo de las direcciones de máxima y mínima varianza, con semi diámetros dados por las respectivas desviaciones estándar.

Mientras la distribución de respuestas en el plano $(\delta r, \delta c)$ es bastante disperso, se observa una separación mutua de las elipses con significancia estadística a lo largo del

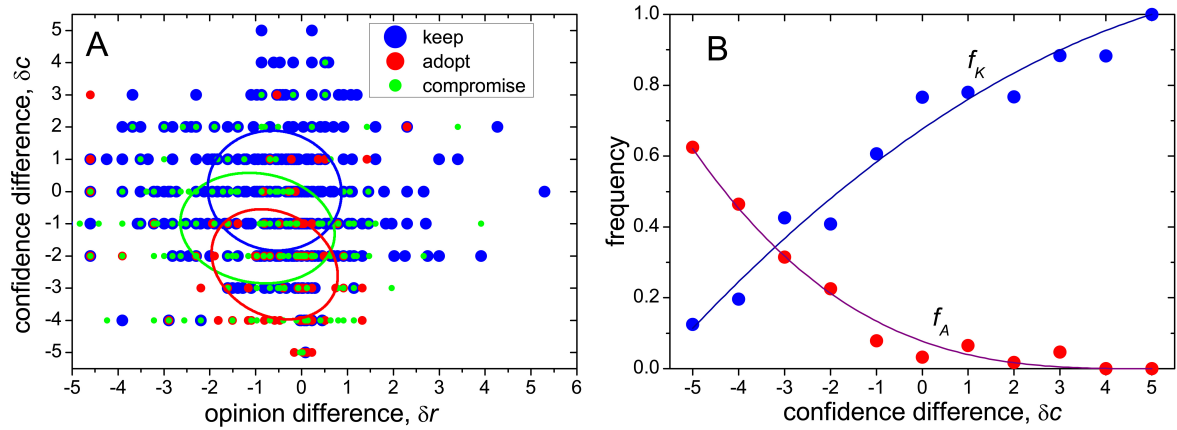


Figura 4.3: Distribución de respuestas respecto a la diferencia de opinión y a la diferencia de confianza. A: Cada punto del gráfico corresponde a un par de respuestas, con coordenadas dadas por la diferencia de opinión y de confianza, δr y δc . Los colores y tamaños de las tres categorías están indicados en la leyenda del gráfico. Las elipses dan los intervalos de desviación estándar alrededor de el valor medio de cada una de las categorías, siguiendo los mismos códigos de colores B: La frecuencia de preguntas correspondientes a las categorías de mantener y adoptar como una función de la diferencia de confianza. Las curvas corresponden a ajustes polinomiales de los datos: $f_K = 1 - 0,04(5 - \delta c) - 0,005(5 - \delta c)^2$, y $f_A = 6,2 \times 10^{-4}(5 - \delta c)^3$. Los coeficientes de cuadrados mínimos de las regresión, son $R^2 = 0,96$ y $0,98$, respectivamente.

eje de diferencia de confianzas. Como se puede esperar, grandes y pequeños valores de δc , donde la confianza del sujeto es respectivamente alta y baja comparada con la referencia, se muestran relacionadas a mantener y adoptar las opiniones. El rango de opiniones tipo compromiso, ocupa el rango intermedio. Por otro lado se observa que la correlación entre las diferentes categorías y la diferencia de opinión es muy poco significativa. Este hecho sugiere que, las comparaciones con la respuesta de referencia tienen una consecuencia despreciable sobre la influencia.

La correlación entre las categorías de respuesta y diferencia de confianza es cualitativamente igual a la obtenida en la versión previa de este experimento [18]. Sin embargo, en esa versión la distribución de respuestas en el plano $(\delta r, \delta c)$ fue usada para construir un “mapa de influencia” con tres regiones bien separadas, una correspondiente a cada categoría. Este mapa provee entonces las bases para formular un modelo de formación de opinión por influencia social. En nuestros resultados hay una mayor superposición entre las tres diferentes regiones, en consecuencia la construcción de ese mapa no puede ser justificado. La correspondencia entre las categorías de las respuestas y su posición en el plano $(\delta r, \delta c)$, en nuestro caso, es más bien de naturaleza probabilística.

Una caracterización más transparente de la distribución de respuestas por categoría en términos de la diferencia de confianza está dada por la medición de la frecuencia de las tres categorías como una función de δc . Aprovechando el hecho de que la diferencia de confianza esta dado siempre por números enteros, podemos hacer esto para cualquier valor de δc entre -5 y 5 . La Fig. 4.3B muestra los resultados para las categorías de mantener y adoptar (f_K y f_A respectivamente). La frecuencia de la categoría remanente

compromiso, queda definida como el complemento de las otras dos ($f_C = 1 - f_K - f_A$). Los resultados muestran claramente una tendencia inversa entre f_K y f_A , con la primera creciendo y la segunda decreciendo, con un incremento de confianza respecto a la referencia. En particular, para la diferencia máxima de confianza, $\delta_c = 5$, las frecuencias alcanzan los valores extremos de $f_K = 1$ y $f_A = 0$. Las curvas en la Fig. 4.3B son ajustes polinomiales, los cuales serán usados (más adelante) en nuestras simulaciones numéricas.

Finalmente, poniendo la atención en el cambio de confianza entre rondas, $\Delta c = c' - c$. La Fig. 4.4 muestra un histograma para Δc en los pares de respuestas de las preguntas del tipo A. Así como para la opinión, el comportamiento dominante con la confianza es una postura conservadora: en el 71 % de las respuestas, los sujetos no modificaron sus confianzas al recibir la referencia. Además, la distribución está fuertemente inclinada hacia los valores positivos, lo que significa que el cambio en el nivel de confianza es usualmente creciente. Esto ocurre en 26 % de las respuestas, con una preferencia en los cambios pequeños y positivos de confianza. Solo el 3 % corresponde al decrecimiento de confianza. La tabla S2, da la frecuencia observada para cada Δc . Esto fue utilizado luego en el modelo de evolución de confianza.

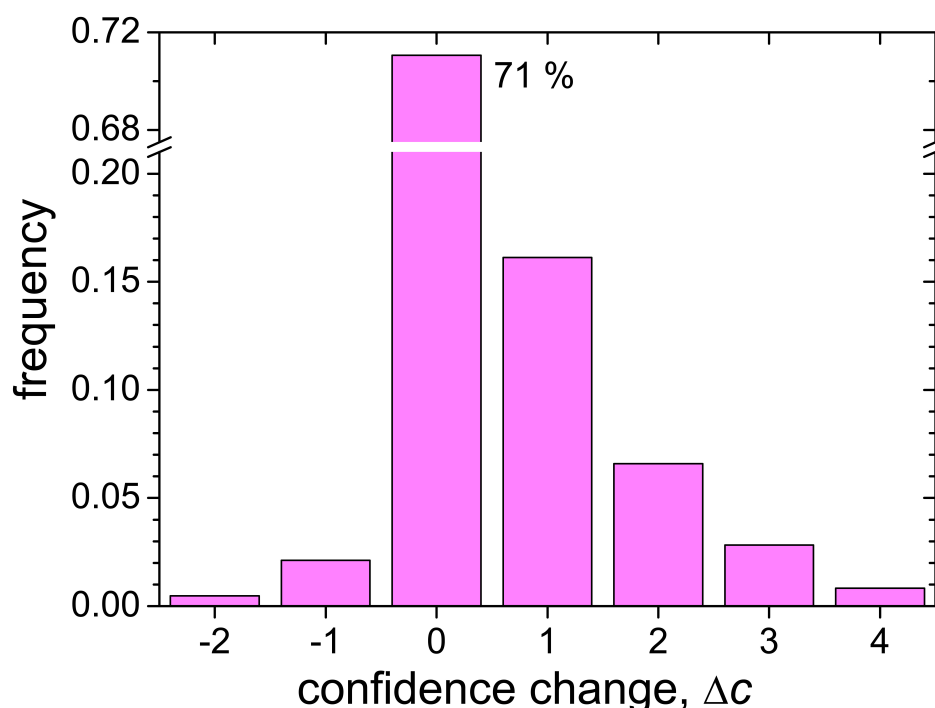


Figura 4.4: distribución de cambios en los niveles de confianza. El histograma muestra las frecuencias para el cambio de confianza entre rondas, $\Delta c = c' - c$, para las preguntas del tipo A (Ver también tabla S2). La frecuencia es exactamente igual a cero para $\Delta c < -2$ y $\Delta c > 4$. Por lejos, el valor mas lejos de frecuencia es a $\Delta c = 0$, con cerca del 71 % del los casos. La distribución está sesgada hacia valores positivos, con un total de 26 % y 3 % de los casos para $\Delta c > 0$ y $\Delta c < 0$, respectivamente.

Un resultado notable para el cambio de confianza es que Δc muestra una pequeña correlación con la diferencia de confianza δr y con el cambio de opinión Δr . El coeficiente de correlación de Pearson es $\rho = -0,02$ y $0,05$. La correlación entre Δc y el factor de influencia I arroja el valor de $\rho = 0,09$, el cual es relativamente pequeño. Por lo tanto, se concluye que las modificaciones en el nivel de confianza son cuantitativamente independientes de la opinión.

Por otro lado, Δc muestra una considerable correlación con el nivel inicial de confianza c , con un coeficiente $\rho = -0,49$. Este hecho a su vez está estrechamente relacionado a una alta correlación entre Δc y la diferencia de confianza δc , con $\rho = -0,47$. No obstante, la correlación entre Δc y c es artificial, el mismo esta originado en el hecho de que los niveles de confianza están limitados a variar entre 0 y 5. En efecto, esto implica que de una confianza inicial dada c el cambio de confianza resultante queda necesariamente confinado a variar entre $-c$ y $5 - c$. Asumiendo una distribución uniforme de respuestas dentro de este intervalo produce una correlación entre Δc y c con $\rho = -0,7$. Este efecto explica de manera complementaria la alta correlación observada en el experimento.

4.4. Modelo teórico

Se propone un modelo basado en agentes para una población de individuos inter-actantes donde cada uno de los agentes i es dotado con una opinión r_i y un nivel de confianza c_i . Ambos atributos evolucionan como el resultado de las interacciones entre agentes. Cada interacción, la cual se considera como similar a una realización de el experimento para alguna pregunta del tipo A, involucra un agente activo i cuya opinión y confianza pueden cambiar en una “confrontación” con los atributos de otro agente j . A cada evento los dos agentes son escogidos al azar del total de la población.

Según las definiciones introducidas en la sección anterior, escribimos la actualización de los atributos del agente i como

$$r'_i = r_i + I_{ij}(r_j - r_i) \quad c'_i = c_i + \Delta c_{ij} \quad (4.2)$$

Donde r_j es la opinión de referencia.

El factor de influencia I_{ij} y el cambio de confianza Δc_{ij} correspondiente a una interacción de los agentes i y j son elegidos sobre la base de nuestros resultados experimentales. Nuestro principal objetivo es caracterizar la evolución colectiva de opinión y confianza en función de interacciones sucesivas que tienen lugar en el total de la población. Hicimos un tratamiento del modelo tanto en forma analítica como a través de simulaciones numéricas.

La primera de las ecuaciones 4.2 pertenece a la clase de modelos cinéticos de forma-

ción de opinión [8, 10] para una evolución de tiempo discreto de contagio de opiniones bajo el efecto de influencia social. En contraste con realizaciones previas de este tipo de modelos [22–25], en nuestro enfoque el factor de influencia I_{ij} es un valor aleatorio escogido en cada interacción de una distribución obtenida a partir de nuestros resultados experimentales.

4.5. Resultados analíticos y teóricos

La evolución de la confianza. Como muestran nuestros resultados experimentales, la confianza cambia entre las dos ronda de preguntas tienen poca correlación con cualquiera de las otras cantidades medidas durante el experimento. Al nivel de modelado parece entonces razonable pensar que la evolución de la confianza es un proceso autónomo, en particular no influenciado por la evolución de opinión.

En una serie de interacciones que envuelven a un dado agente activo i y a un agente genérico de referencia j , la confianza c_i evoluciona como una consecuencia de los cambios sucesivos de confianza Δc_{ij} (ver la segunda ecuación de (4.2)). De acuerdo a nuestros resultados experimentales, podemos asumir que la probabilidad de un dado Δc_{ij} es independiente de las opiniones individuales y de la confianza, y puede ser estimada directamente de nuestros resultados observando la frecuencia de cambio global para cada posible cambio de confianza (ver Fig. 4.4; Tabla 4.1). Además, introducimos la asunción simplificada de que esta estimación es válida no solo para la primera interacción si no que se mantiene a lo largo de eventos sucesivos. Con estos elementos es posible escribir ecuaciones de evolución para la probabilidad de cada nivel de confianza como una función del número de eventos transcurridos. En una población grande esta probabilidad coincide con la fracción de individuos con cada nivel de confianza. Los detalles del modelo matemático son discutidos a continuación.

Entre dos eventos sucesivos, el nivel de confianza cambia como $c' = c + \Delta c$ (ver la segunda ecuación de 4.2). Por lo tanto, la probabilidad P'_c de tomar un dado valor de c' depende de la probabilidad P_c de comenzar desde la confianza c y de la probabilidad $p_{\Delta c}$ de un cambio de confianza $\Delta c = c' - c$. Se considera que las probabilidades de transición $p_{\Delta c}$ no varían en este proceso, y que no dependen de la condición inicial del nivel de confianza. Se recuerda también, que en una población grande, P_c puede ser interpretada como la fracción de la población con nivel de confianza c o equivalentemente como la frecuencia de cada nivel de confianza.

El requisito de que el nivel de confianza debe estar delimitado entre 0 y 5 puede ser asegurado mediante la fijación de las condiciones de contorno adecuadas. Aquí, se impone que si el nivel de confianza elegido cambia en la dirección de $c' < 0$ o $c' > 5$, la confianza resultante es reasignada a los valores $c' = 0$ y $c' = 5$. Luego, las ecuaciones de evolución para las probabilidades P_c se escriben:

$$\begin{aligned}
P'_0 = & (p_{-5} + p_{-4} + p_{-3} + p_{-2} + p_{-1} + p_0)P_0 \\
& + (p_{-5} + p_{-4} + p_{-3} + p_{-2} + p_{-1})P_1 \\
& + (p_{-5} + p_{-4} + p_{-3} + p_{-2})P_2 \\
& + (p_{-5} + p_{-4} + p_{-3})P_3 + (p_{-5} + p_{-4})P_4 + p_{-5}P_5
\end{aligned}$$

$$P'_1 = p_1P_0 + p_0P_1 + p_{-1}P_2 + p_{-2}P_3 + p_{-4}P_4 + p_{-4}P_5$$

$$P'_2 = p_2P_0 + p_1P_1 + p_0P_2 + p_{-1}P_3 + p_{-2}P_4 + p_{-3}P_5$$

$$P'_3 = p_3P_0 + p_2P_1 + p_1P_2 + p_0P_3 + p_{-1}P_4 + p_{-2}P_5$$

$$P'_4 = p_4P_0 + p_3P_1 + p_2P_2 + p_1P_3 + p_0P_4 + p_{-1}P_5$$

$$\begin{aligned}
P'_5 = & p_5P_0 + (p_5 + p_4)P_1 + (p_5 + p_4 + p_3)P_2 \\
& + (p_5 + p_4 + p_3 + p_2)P_3 + (p_5 + p_4 + p_3 + p_2 + p_1)P_4 \\
& + (p_5 + p_4 + p_3 + p_2 + p_1 + p_0)P_5
\end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones maestras es lineal y autónomo, por lo tanto puede ser resuelto exactamente. Como se estableció en la sección anterior, se estimaron los valores de $p_{\Delta c}$ a partir de los resultados experimentales como las frecuencias observadas para cada Δc .

Primero, la distribución estacionaria de confianza se obtiene de la ecuación $P'_c = P_c$ para todo c . Esto produce los valores que se muestran en la Tabla 1. Segundo, los autovalores mas grandes del sistema lineal caracterizan las escalas de tiempo típicas de la evolución. En nuestro caso, el autovalor máximo es $\lambda_0 = 1$, como es requerido para la conservación de la probabilidad total $P_0 + \dots + P_5 = 1$. El segundo autovalor más grande es $\lambda_1 \approx 0,836$. La contribución dominante para aproximar la distribución estacionaria depende del número n de eventos por agentes como λ_1^n . Entonces, la distancia al estado estacionario decrece en un factor ν en $n_\nu = -\ln \nu / \ln \lambda_1$ eventos por agente. Para $\nu = 2$ y 10 respectivamente se encuentran los valores $n_2 = 3,9$ y $n_{10} = 12,9$.

Entonces, la solución a estas ecuaciones de evolución muestran que, después de una larga secuencia de eventos, la distribución de los niveles de confianza sobre la población alcanzan un perfil estacionario, independiente de la condición inicial. La tabla 4.1 da la distribución de niveles de confianza medidos en la primer ronda del experimento, y el valor estacionario obtenido del modelo teórico. Vemos que, acorde a nuestro modelo, alrededor del 90 % de la población alcanza la confianza máxima, esto es debido a la preferencia por los cambios de valores positivos observados en el cambio de confianza. Sin embargo, los cambios negativos de confianza hacen posible niveles de confianza bajos, aunque con una considerable bajas frecuencia.

Tabla 4.1: Frecuencia de los niveles de confianza. Primera línea: Lo medido en la primera ronda del experimento. Segunda línea: Valores teóricos estacionarios.

Confianza	0	1	2	3	4	5
Inicial (experimento)	0,086	0,113	0,216	0,400	0,160	0,025
Estacionaria (teórica)	< 0,001	0,001	0,003	0,022	0,079	0,895

De la solución, es posible evaluar el número típico de eventos necesarios para aproximarse a la distribución estacionaria de niveles de confianza. Los resultados indican que la distribución se reduce en un factor de 10 cada 13 eventos por agente (ver apéndice 4.9). Entonces, la convergencia de los niveles de confianza hacia su perfil para largos tiempos es un proceso bastante rápido, en particular comparándolo con la evolución de opiniones, como se muestra en las siguientes líneas.

La evolución de opiniones. En las simulaciones numéricas de nuestro modelo de formación de opinión, el comportamiento de los agentes, es decir si mantiene su opinión original, adopta la de referencia, o elige hacer un compromiso, es a partir de las frecuencias f_K , f_A , y f_C , medidas en el experimento. Una vez que el agente activo i y el agente de referencia j son seleccionados, se calcula la diferencia de confianza $\delta c = c_i - c_j$. Para este valor de δc , se calculan las probabilidades de que el agente se comporte dentro de alguna de las tres categorías. Esto se hace a partir de la aproximación analítica de las correspondientes frecuencias. (ver Fig. 4.3B y el gráfico de las curvas). Una categoría se escoge usando esas probabilidades, las cuales determinan el valor del factor de influencia I_{ij} para ese evento. En el caso de compromiso, el valor I_{ij} seleccionado al azar de una distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$. Finalmente el factor de influencia es usado para actualizar la opinión del agente activo siguiendo la primera ecuación de 4.2.

El hecho de que a cada evento de interacción (a menos de que $\delta c = 5$) haya una probabilidad finita de que el agente activo cambie su opinión y haga un compromiso con la respuesta de referencia implica que la población se aproxime asintóticamente para tiempos largos a un estado de consenso total, en donde todos los agentes comparten la misma opinión. Asumiendo como una aproximación que todos los agentes tienen máxima confianza, es posible mostrar analíticamente que la opinión final de consenso coincide con el valor promedio de la distribución inicial de opiniones (ver apéndice 4.9).

Además, estudiando la evolución de la desviación estándar de opiniones, es posible estimar el número típico de eventos por agente necesario para acercarse al consenso. El cálculo muestra que la desviación estándar decrece en un factor 2 cada 16 eventos por agente. Por lo tanto, la evolución de opiniones es sustancialmente más lenta que la de confianza.

La Fig. 4.5A muestra resultados de la simulación en la evolución del promedio de

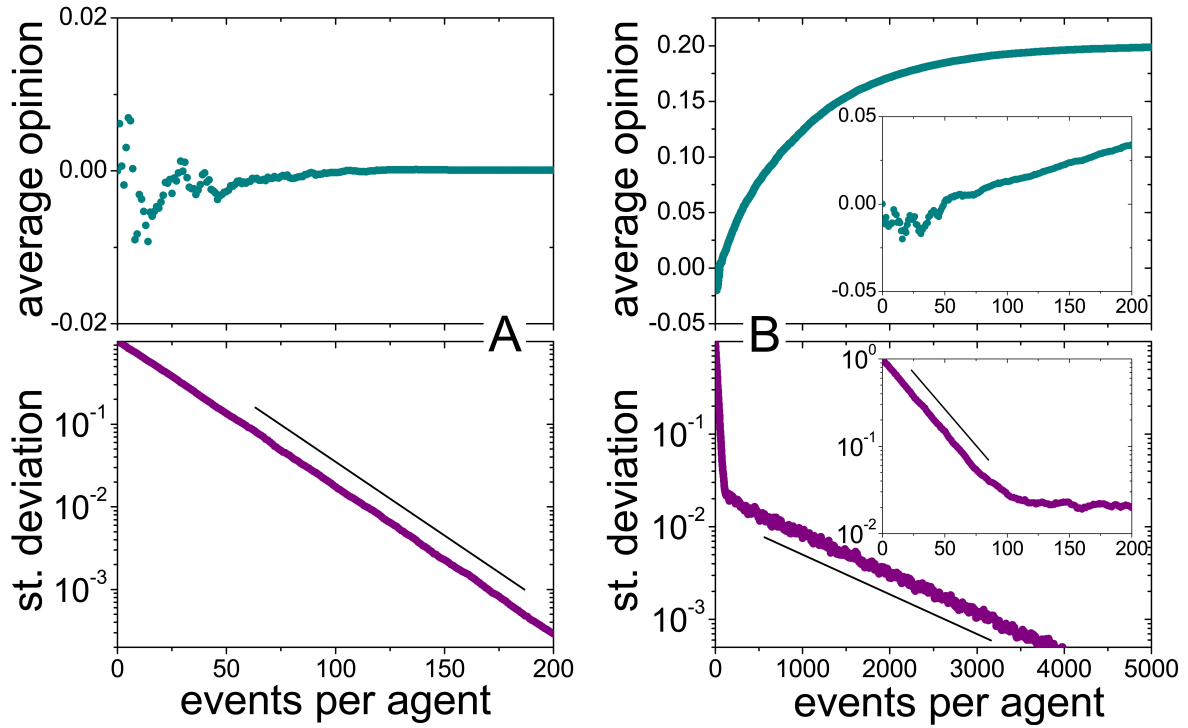


Figura 4.5: Evolución del valor medio y la desviación estándar de la opinión. Los gráficos muestran los resultados de simulaciones para una población de 10^4 agentes, cuyas opiniones iniciales fueron distribuidas normalmente y cuyas confianzas fueron distribuidas como fue observado en la primer ronda del experimento. Los resultados son graficados como función del número de eventos por agente. Las líneas rectas corresponden a la predicción analítica de pendiente exponencial (ver apéndice 4.9). A: Sin líderes de opinión. B: Con un líder de opinión, cuya opinión es $R = 0,2$. El factor de influencia del líder es distribuido como lo es con cualquier otro simple agente, pero el líder es elegido como referencia 100 veces más frecuentemente que cualquier otro agente. Los insets son acercamientos del escenario inicial de evolución.

opinión y la desviación estándar para una población de $N = 10^4$ agentes. Inicialmente, las opiniones fueron distribuidas siguiendo una distribución normal con media cero y desviación estándar unidad, mientras la confianza es distribuida como se observó en la primer ronda del experimento. La opinión promedio muestra fluctuaciones transitorias con un tamaño típico de orden $N^{-1/2} = 0,01$, hasta que se establece en su valor asintótico. La desviación estándar decrece exponencialmente con la pendiente predicha por el cálculo analítico (línea recta en el gráfico). Una desviación menor al decaimiento exponencial puro, se observa en la distribución de confianza.

El poco interesante desenlace de consenso total para la opinión promedio puede ser desafiado con la presencia de uno o más agentes con reglas especiales en la dinámica. En ese sentido, consideramos “líderes de opinión” [26–28] los cuales son caracterizados por su capacidad privilegiada de influenciar a agentes ordinarios. Un líder de opinión se define por tres características especiales. Primero, su opinión es fija (no es alterada por la interacción con otros agentes) y su confianza esta siempre en nivel máximo. Segundo, la frecuencia con la cual el líder es seleccionado para jugar el papel de referencia puede ser más grande que la de cualquier otro agente. Tercero, su influencia en la opinión

del agente activo (medida por el promedio del factor de influencia) puede también ser mayor.

Bajo la influencia de un solo líder de opinión, la población es todavía atraída hacia un estado final asintótico de consenso final. Donde la opinión final se hace coincidente con la del líder. Mientras las interacciones entre agentes ordinarios conducen a las opiniones hacia su valor medio, los eventos ocasionales donde participa la opinión del líder, la cual esta fija y en su máxima confianza, dirigen la opinión de toda la población hacia la opinión del líder. Si la influencia del líder sobre cada agente, medido por la frecuencia de sus interacciones mutuas y por el correspondiente factor de influencia, es entre pequeña y moderada comparada con el efecto de la población restante, la evolución colectiva de opiniones muestra dos escenarios bien separados. Primero, la opinión inicia un colapso rápido hacia su valor promedio, como si la opinión del líder fuera irrelevante. Luego las interacciones con el líder comienzan a tener un efecto considerable. En el segundo escenario, la opinión promedio cambia hacia la opinión del líder y al mismo tiempo el decrecimiento de la desviación estándar se hace más lento de manera abrupta. Los dos escenarios de evolución son ilustrados a partir de los resultados de las simulaciones en la Fig. 4.5B. En esas simulaciones, el factor de influencia del líder se distribuye como para un agente ordinario, pero su opinión es elegida como opinión de referencia 100 veces más frecuentemente, es decir con probabilidad $\alpha \approx 100 N^{-1} = 0,01$.

Dos o más lideres con diferentes opiniones son necesarios para conducir a la población hacia un estado estacionario donde el consenso total no se logra. Es este estado, la opinión de cada agente continúa evolucionando infinitamente, siendo conducida por sus interacciones con los lideres y con los demás agentes de diferentes opiniones, pero la distribución sobre toda la población es estadísticamente invariante. En el apéndice 4.9, se dan resultados analíticos para la opinión media asintótica y la desviación estándar en el caso de varios lideres. El consenso total solo es posible en el caso de que todos los agentes compartan la misma opinión.

A modo de ilustración, la Fig. 4.6 muestra los resultados de la simulación para la distribución estacionaria de opiniones bajo la influencia de dos lideres con opiniones distintas. Los diferentes paneles en la figura se corresponden con diferentes frecuencias de interacción con los lideres (aunque la relación entre las dos frecuencias se mantiene constante). Para frecuencias bajas, la distribución muestra un perfil estrecho, con una larga fracción de opiniones alrededor de un valor intermedio. Los resultados analíticos muestran que, siempre para frecuencias arbitrariamente chicas, este valor intermedio es determinado por la opinión del líder. La opinión inicial de los agentes ordinarios no tienen ningún efecto en esto (apéndice 4.9). A medida que la frecuencia crece, la distribución se vuelve más amplia y más plana. Al mismo tiempo, aparecen picos afilados alrededor de las opiniones de los lideres [27]. Finalmente para frecuencias suficientemente altas, la distribución muestra un perfil de distribución bimodal

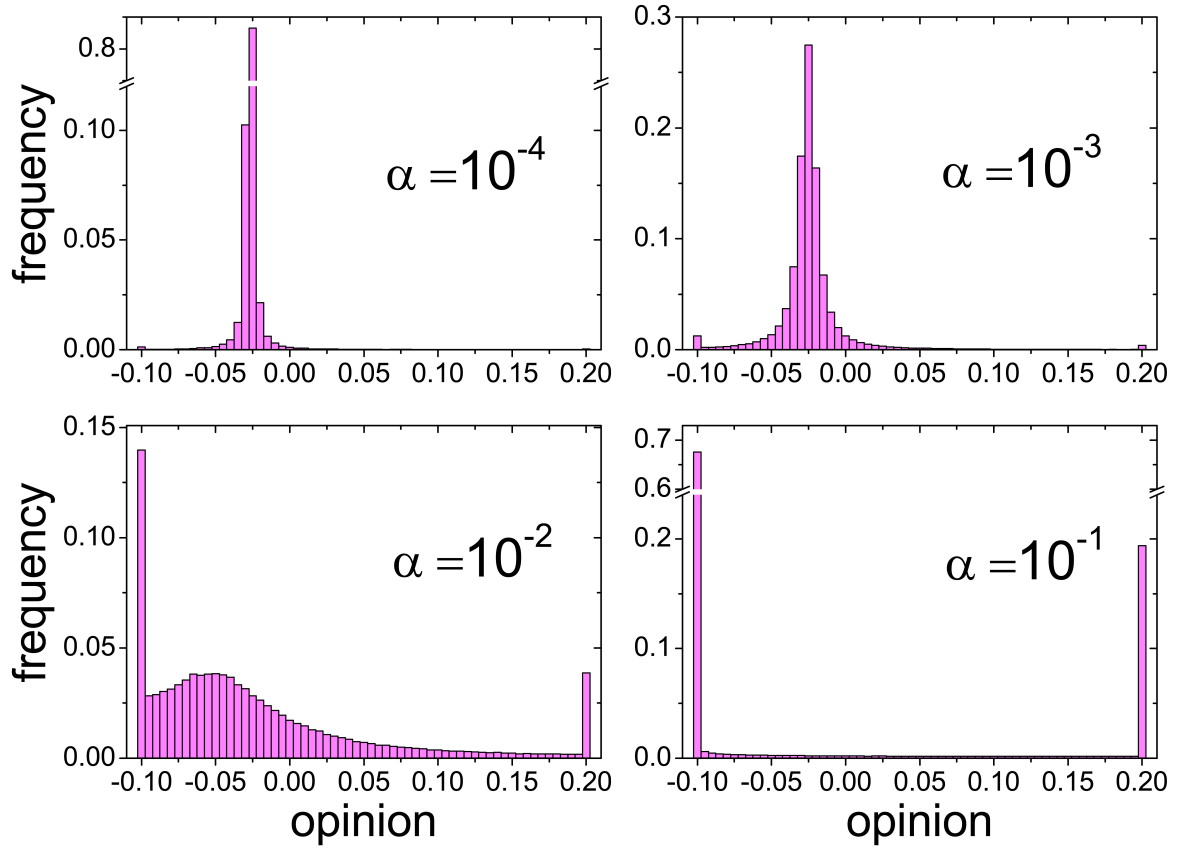


Figura 4.6: Distribuciones de opinión bajo la influencia de dos líderes. Los histogramas muestran los resultados de las simulaciones para la distribución estacionaria de opiniones en una población de 10^4 agentes, con la misma condición inicial que en Fig. 4.5. Los líderes tienen opiniones fijas en $R_1 = 0,2$ y $R_2 = -0,1$, y son escogidos como referencia con frecuencias $\alpha_1 = \alpha$ y $\alpha_2 = 4\alpha$, respectivamente. Los cuatro paneles corresponden a diferentes valores de α , tal como se indica en las leyendas. La influencia de los líderes es tal que, tras la interacción con un líder, los agentes ordinarios siempre adoptan la opinión del líder.

donde prácticamente todos los agentes comparten las opiniones de cada líder. A esas frecuencias de interacción, la población se polariza contrastando las influencias de los dos líderes.

4.6. Discusión y conclusiones

Se han presentado resultados sobre una variante de un experimento recientemente propuesto para estudiar la formación de opinión a través de la influencia [18]. El experimento consistió de una serie de eventos donde cada sujeto daba una respuesta cuantitativa a una pregunta y después tenía la oportunidad de revisar la respuesta tras la exposición de una opinión diferente (“referencia”) sobre la misma pregunta. Se le pidió también al sujeto que evalúe su nivel de confianza respecto a las dos respuestas que daba. Nuestro foco estuvo puesto en cuantificar el cambio entre la primer y la segunda ronda, en la opinión y en la confianza, en función de la referencia que se da-

ba. Los resultados experimentales fueron usados para estimar ciertos parámetros que fueron utilizados luego para una dinámica de agentes en una propuesta de modelo de formación de opinión, donde la distribución colectiva de opiniones en una población grande de agentes evoluciona como el resultado de iteraciones de a pares, de manera similar a los eventos de los individuos en el experimento.

La instancia más frecuente medida en el experimento corresponde a no cambiar ni la opinión ni la confianza dada, lo cual esta en acuerdo con un resultado comparable en la versión original del experimento. En al menos el 60 % de los eventos, los sujetos eligieron no modificar su respuesta, de manera similar más del 70 % de los casos no registro cambios en la confianza. Este comportamiento, el cual puede ser catalogado como una forma de resistencia a la persuasión, a la cual las personas afirman psicológicamente su auto consistencia y su sensación de auto control [29], lo cual obviamente no contribuye a la evolución de opinión colectiva. Sin embargo, en la medida en que se adoptaba la opinión de referencia o se hacia un compromiso, el efecto principal de la actitud obstinada fue solo una ralentización del proceso [30]. En números redondos, en el experimento, las actitudes de adopción y de compromiso correspondieron respectivamente al 10 % y 30 % del total de los eventos. En el caso del compromiso, la respuesta revisada que daba el sujeto fue mas o menos uniformemente distribuida entre la respuesta y la referencia.

De acuerdo a nuestros resultados, cuando la confianza cambiaba, los incrementos fueron aproximadamente diez veces más frecuentes que las reducciones. Notablemente, sin embargo, los cambios de confianza acarrearón cambios insignificantes en las correlaciones estadísticas con todas las otras cantidades involucradas en cada evento, como ser la diferencia de opinión y de confianza respecto a la referencia, y el cambio de opinión. Esta puede ser un indicio interesante de una actitud de reafirmación generalizada [31], independiente de una evaluación objetiva de la propia opinión y la confianza en comparación con la referencia. Al nivel de modelado estas observaciones hacen posible tratar a la confianza como un atributo con dinámica autónoma. La inserción de nuestros resultados experimentales en un modelo dinámico mostró que las interacciones iteradas conducen a una distribución estacionaria para la confianza con el 90 % de la población en el máximo nivel de confianza luego de solo unos pocos eventos por agente. Es de notar sin embargo que el modelo asume que los cambios de confianza son los mismos a lo largo de toda la serie de interacciones. La validación de esta hipótesis requeriría más evidencia experimental.

Se debe reconocer que los niveles de confianza fueron basados en una escala que se define en forma cualitativa, al contrario de las repuestas cuantitativas a las preguntas del experimento. Los valores dependen en consecuencia de la interpretación de la escala que hacia cada sujeto, lo cual no posee una objetividad deseable. Esta pérdida de rigurosidad en la definición de los niveles de confianza puede explicar en parte la baja

correlación de los cambios de confianza con todos los otros parámetros del experimento. El diseño de una forma de caracterización más cuantitativa (y convincente) de la confianza puede ser un problema desafiante que queda planteado para trabajos futuros

Otro aspecto inscrito en la problemática de las valoraciones cualitativas tiene que ver con la dificultad percibida (o ambigüedad) de cada pregunta, independientemente del hecho de que tiene una precisa respuesta cuantitativa. Diferentes grados de dificultad pueden conducir al sujeto a adoptar varias estrategias a la hora de generar una respuesta, y esto puede afectar la postura ante la respuesta de referencia. El análisis de las características de estas actitudes probablemente requeriría un enfoque empírico independiente.

En contraste con la versión original del experimento, nuestros resultados no sugieren una relación bien definida entre las respuestas a las opiniones de referencia (mantener, adoptar, hacer un compromiso) y las correspondientes diferencias de opinión y confianza. Por otro lado, hemos encontrado una correlación altamente significativa entre la frecuencia de cada una de las tres categorías y la diferencia inicial entre las confianzas del sujeto y la de referencia. Se concluye que nuestros resultados soportan una predicción probabilística de la influencia en la respuesta del sujeto a partir de la diferencia de confianza con la referencia, aunque no podemos trazar un “mapa de influencia” para anticipar comportamientos en términos de opiniones y confianzas [18]. En base a nuestras observaciones, se estimaron los parámetros de un modelo de formación de opinión tipo cinético, para el cual se obtuvieron una serie de resultados analíticos y corrieron varias simulaciones numéricas para estudiar la evolución de la opinión debida a las interacciones individuales entre agentes. Es importante decir que en nuestro modelo todos los agentes son en principio equivalentes unos con otros, en el sentido de que su compartamiento es controlado con los mismos parámetros. Esto es consistente con el hecho de que en el experimento no se analizaron si las diferencias individuales mostraban comportamientos significativamente distintos en las respuestas a la influencia. De manera adicional en nuestro modelo se introdujeron agentes especiales en la forma de “líderes de opinión” como una manera de explorar situaciones donde las opiniones no convergen a un final de total consenso si no que desarrollan distribuciones estacionarias no triviales.

Usando una estimación de los parámetros medidos del experimento, nuestros resultados analíticos revelan, primero, que el tiempo de evolución típico para la formación de opinión es sustancialmente más largo que aquellos para los de niveles de confianza. Segundo, como se muestra en el apéndice 4.9, la gran disparidad de las respuestas de los agentes a la influencia social, cuantificada por la distribución del factor de interés que se muestra en Fig. 7.1, juega un rol importante en la dinámica. En efecto, la desviación estándar del factor de influencia esta involucrada con la tasa de convergencia de la distribución de opinión y con su dispersión estacionaria. Esto apunta al hecho

de que incluir fluctuaciones en los parámetros que pesan en la influencia social, es un ingrediente deseable en el modelo.

Una observación experimental que choca con la hipótesis básica de algunos modelos de formación de opinión es la falta de correlación entre la respuesta y las diferencias entre opinión y referencia. En modelos de confianza limitada [22–25], el compromiso de opinión es posible solo si la opinión original de los agentes interactuantes difieren en menos de un cierto umbral. De otra manera, los agentes mantienen sus respectivas opiniones. En contraste con esas hipótesis, nuestros resultados muestran que si el agente activo mantiene su opinión, hace un compromiso, o adopta la opinión de referencia, es en gran medida independiente de como se comparan las opiniones. Este tipo de conflicto debe servir como un incentivo para desarrollar estudios teóricos cuantitativos de formación de opinión, y fenómenos sociales en general, bajo una solida evidencia empírica.

4.7. Apéndice 1: Lista de preguntas utilizadas en el experimento

A continuación se indican las preguntas utilizadas en el experimento. En algunos casos se da una breve explicación de lo que se esta preguntando para ayudar al lector no familiarizado con las costumbres argentinas. En cada pregunta también se especifica si se trataba del tipo A o del tipo B.

1. *¿Cuántos discos de estudio grabó la banda británica “The Beatles”? (B)*
2. *¿Cuántos kilómetros en línea recta separan la ciudad de Viedma de Buenos Aires? (Viedma es la capital de la provincia de Rio Negro. Tipo: A)*
3. *¿Cuántos centímetros de largo mide una cuerda en una guitarra criolla del puente al clavijero? (la pregunta era acompañada de una fotografía de una guitarra donde se indicaba el tamaño a estimar. Tipo: B)*
4. *¿Cuántos metros de largo tiene una cinta “scotch” en todo el carretel? (La pregunta era acompañada de una fotografía de un rollo típico. Tipo: A)*
5. *¿Cuántas galletitas tiene un paquete de “Cerealitas”? (Las cerealitas son unas galletitas muy populares en Argentina. Tipo: B)*
6. *¿Cuántos kilos de arroz cocido se preparan con medio kilo de arroz blanco crudo? (Tipo: A)*
7. *¿Cuántos gramos pesa una moneda de \$1 Argentino? (El peso de una moneda de 1 peso ha tenido el mismo peso desde hace décadas. Tipo: B)*

8. *¿Cuántos metros de alto mide el Obelisco de Buenos Aires?* (El obelisco de la ciudad de Buenos Aires es un monumento icónico de Argentina. Tipo: A)
9. *¿A qué temperatura ($^{\circ}C$) funde el hierro?* (Tipo: B)
10. *En promedio, ¿cuántos litros de agua gasta una persona adulta al bañarse?* (Tipo: A)
11. *¿A cuántos km/h viaja una bala disparada de un revólver reglamentario 9mm?* (Tipo: B)
12. *En promedio, ¿cuántas toneladas pesa una ballena azul adulta?* (Tipo: A)
13. *¿Cuántas películas realizó como director Stanley Kubrick?* (Tipo: B)
14. *¿En que año nació Isaac Newton?* (Se espera que los participantes estén familiarizados con esto ya que todos fueron estudiantes de ciencias. Tipo:A)
15. *¿Cuántas horas dura en promedio una partida de ajedrez en un torneo internacional?* (Tipo: B)
16. *¿Cuántas horas duran en promedio los vuelos de cabotaje en la Argentina?* (Tipo: A)
17. *¿Cuántos huesos tiene el esqueleto de un ser humano?* (Tipo: B)
18. *En promedio, ¿cuántos años vive una tortuga de las Islas Galápagos?* (Tipo: A)
19. *¿Cuántos países hay en el continente africano?* (Tipo: B)
20. *¿Cuántas palabras tiene el diccionario de la Real Academia Española?* (Tipo: A)

4.8. Apéndice 2: Distribución de respuestas en la primer ronda

En las figuras 4.7 y 4.8 mostramos las distribuciones de respuestas obtenidas para las veinte preguntas del experimento.

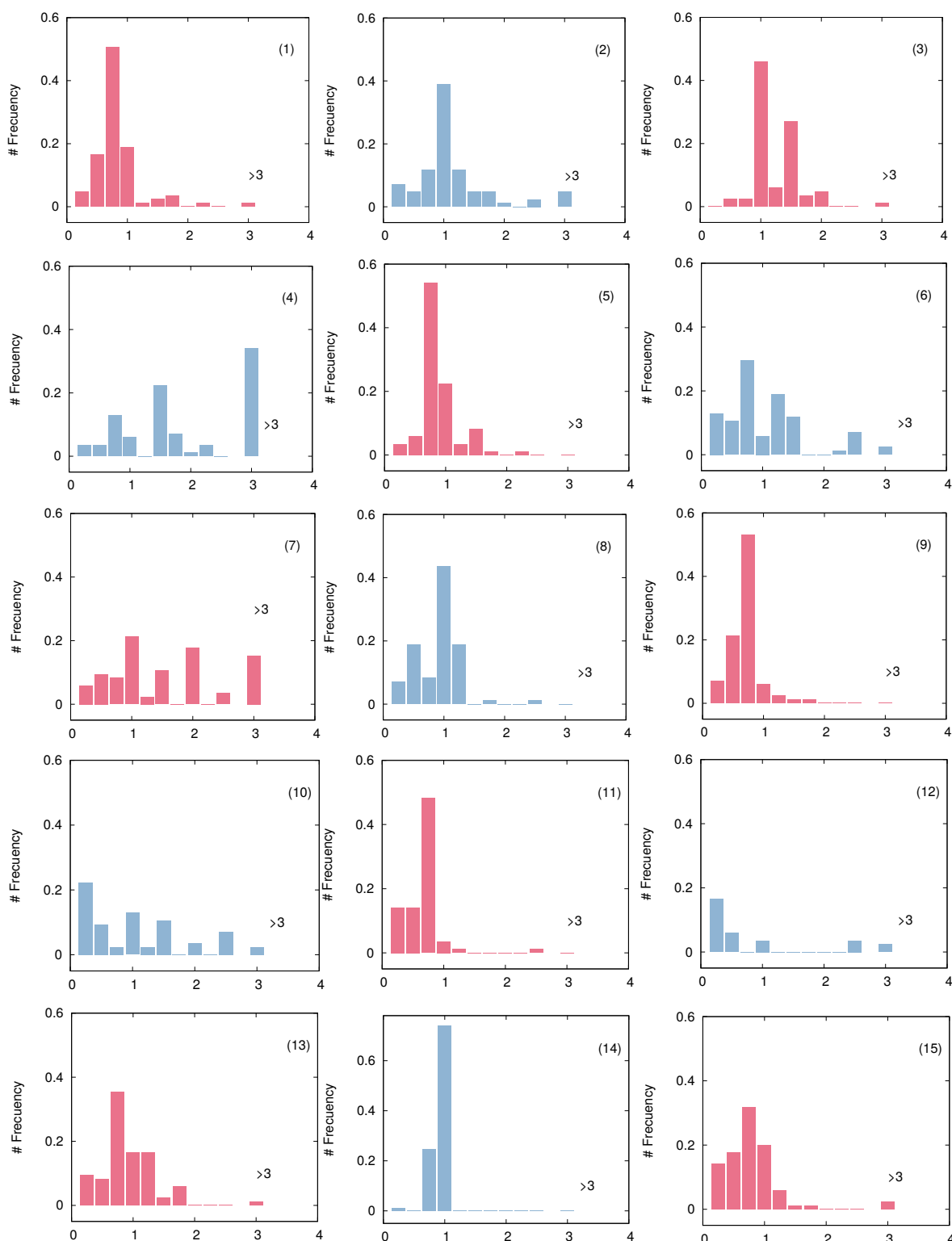


Figura 4.7: Distribución de respuestas para las preguntas del 1 al 15. Los histogramas azules representan preguntas del tipo 1, y los magenta de tipo 2. Todos los histogramas están normalizados al valor real de las respuestas.

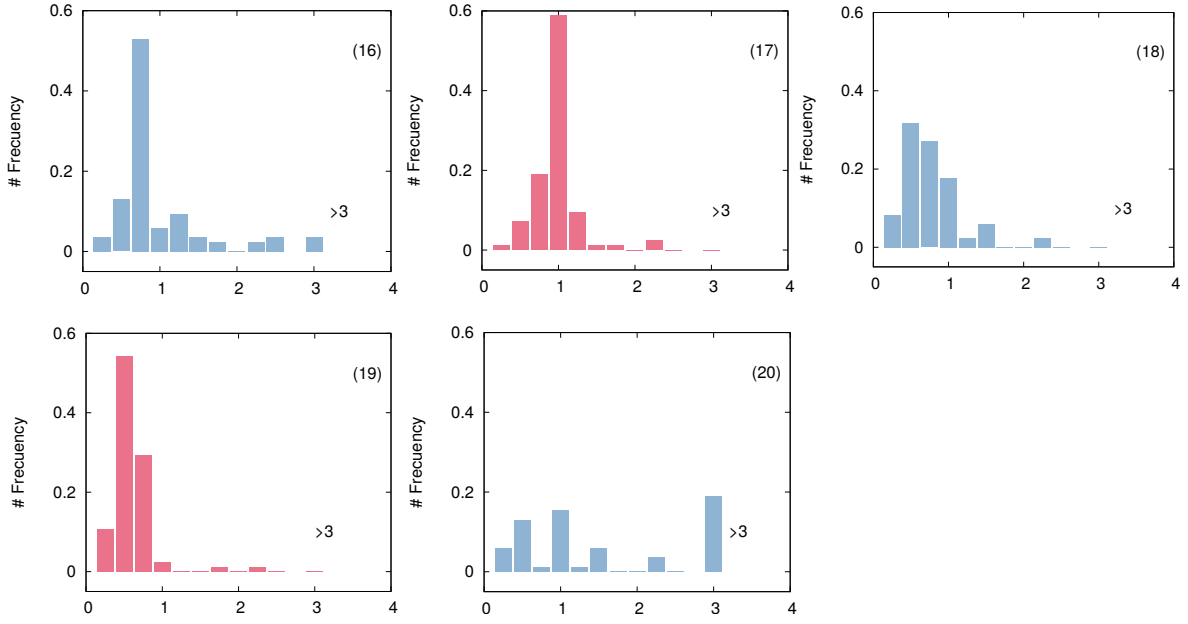


Figura 4.8: Distribución de respuestas para las preguntas del 16 al 20. Los histogramas azules representan preguntas del tipo 1, y los magenta de tipo 2. Todos los histogramas están normalizados al valor real de las respuestas.

4.9. Apéndice 3: Aproximación analítica a la evolución de opiniones

Tal como es explicado en la sección principal, la implementación de la primer ecuación de 4.2 como un modelo de evolución de opinión requiere el calculo del factor de influencia I_{ij} para cada interacción dada entre agentes i y j . En cambio, el factor de influencia depende de la diferencia de confianza entre los dos agentes, las cuales cambian en el desarrollo del proceso. Una aproximación que hace posible el tratamiento analítico de la primera ecuación de 4.2 es asumir que la confianza ya ha alcanzado su distribución asintótica y además que todos los agentes tienen la confianza máxima confianza, así la diferencia de confianza para cualquier par de agentes dados es $\delta c = 0$. Bajo esta asunción la distribución de probabilidad para el factor de influencia es estimada por las frecuencias calculadas para cada categoría, f_K , f_A , y f_C , usando la aproximación analítica dada en la Fig. 4.3 por $\delta c = 0$.

Promediando la primera de las ecuaciones 4.2 sobre el total de la población de agentes, se encuentra

$$\langle r' \rangle = \langle r \rangle$$

Lo cual implica que en nuestro modelo la opinión promedio se preserva durante el proceso. Un cálculo similar muestra que la desviación estándar de opiniones cambia según

$$\sigma'_r = (1 - 2\langle I \rangle + 2\langle I^2 \rangle)^{1/2} \sigma_r$$

Donde los promedios del factor de influencia y su cuadrado son calculado sobre la respectiva distribución de probabilidad. Usando la distribución de probabilidad estimada para $\delta c = 0$, se encuentra $\sigma'_r \approx 0,958 \sigma_r$. Como una consecuencia, la desviación estándar se reduce a la mitad cada 16 eventos por agentes. Entonces, la convergencia de opiniones es considerablemente más lenta que la de los niveles de confianza, lo cual justifica la aproximación de una distribución estacionaria de confianzas. Para tiempos largos asintóticos, todos los agentes comparten la misma opinión, el cual coincide con el valor inicial de $\langle r \rangle$.

En la presencia de M lideres de opinión, cuyos roles especiales en la dinámica son definidos en el texto principal, la primera de las ecuaciones 4.3 es reemplazada por el siguiente conjunto de reglas probabilísticas dinámicas:

$$r'_i = \begin{cases} r_i + I_{im}(R_m - r_i) & \text{con probabilidad } \alpha_m, \quad m = 1, \dots, M \\ r_i + I_{ij}(r_j - r_i) & \text{con probabilidad } \alpha_0 \end{cases}$$

y $\alpha_0 = 1 - \sum_m \alpha_m$. La primera linea describe la interacción de un agente i con el líder de opinión m ($= 1, \dots, M$), la cual ocurre con frecuencia α_m y es caracterizado por un factor de influencia I_{im} . La opinión fija del líder m es R_m . La segunda linea corresponde a la interacción con un agente ordinario j .

En una aproximación continua en el tiempo, las ecuaciones de arriba predicen que el promedio de la opinión depende del número de eventos por agentes, n , como

$$\langle r \rangle = \bar{R} + (\langle r \rangle_{\text{ini}} - \bar{R}) \exp(-n/n_T)$$

donde $\langle r \rangle_{\text{ini}}$ es el promedio de la opinión inicial, y

$$\bar{R} = \frac{\sum_m \alpha_m \langle I \rangle_m R_m}{\sum_m \alpha_m \langle I \rangle_m} \quad n_T = \left(\sum_m \alpha_m \langle I \rangle_m \right)^{-1}$$

Entonces, el promedio de opinión converge a \bar{R} , que es a su vez un promedio de las opiniones de los lideres, cada uno de ellos ponderados por el factor $\alpha_m \langle I \rangle_m$. La inversa de la suma de todos esos factores, n_T , es el típico número de eventos para que se produzca la convergencia.

Así mismo es posible encontrar la evolución de la desviación estándar de opiniones. Para ser breves solo se reporta la desviación estándar estacionaria, la cual es alcanzada luego de una asintóticamente larga serie de eventos:

$$\sigma_{\text{st}} = \left[\frac{\sum_m \alpha_m \langle I^2 \rangle_m (\bar{R} - R_m)^2}{2\alpha_0(\langle I \rangle - \langle I^2 \rangle) + \sum_m \alpha_m (2\langle I \rangle_m - \langle I^2 \rangle_m)} \right]^{1/2}$$

Bibliografía

- [1] Axelrod R (1997) The dissemination of culture. A model with local convergence and global polarization. *J. Conflict Resol.* 41: 203-226. [45](#)
- [2] Nowak MA, Krakauer DC (1999) The evolution of language. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 96: 8028-8033. [45](#)
- [3] Rogers EM (2003) *Diffusion of Innovations*, 5th Edition. Chicago: Simon & Schuster. [45](#)
- [4] Castellano C, Fortunato S, Loreto V (2009) Statistical physics of social dynamics. *Rev. Mod. Phys.* 81: 591-646. [46](#)
- [5] Galam S (1997) Rational group decision making. A random field Ising model at $T = 0$. *Physica A* 238: 66-80. [46](#)
- [6] Sznajd-Weron K, Sznajd J (2000) Opinion evolution in closed community. *Int. J. Mod. Phys. C* 11: 1157-1166.
- [7] Chen P, Redner S (2005) Consensus formation in multi-state majority and plurality models. *J. Phys. A* 38: 7239-7252. [46](#)
- [8] Toscani G (2006) Kinetic models of opinion formation. *Comm. Math. Sci.* 4: 481-496. [46](#), [55](#)
- [9] Schweitzer F, Holyst J A (2000) Modelling collective opinion formation by means of active Brownian particles. *Eur. Phys. J. B* 15: 723-732. [46](#)
- [10] Sobkowicz P (2009) Modelling opinion formation with Physics tools: Call for closer link with reality. *J. Artif. Soc. Soc. Simul.* 12: 11. [46](#), [55](#)
- [11] Bernardes A T, Stauffer D, Kertesz J (2002) Election results and the Sznajd model on Barabasi network. *Eur. Phys. J. B* 25: 123-127. [46](#)
- [12] Caruso F, Catorina P (2005) Opinion dynamics and decision of vote in bipolar political systems. *Int. J. Mod. Phys. C* 16: 1473-1487.

- [13] Fortunato S, Castellano C (2007) Scaling and universality in proportional elections. *Phys. Rev. Lett.* 99: 138701. [46](#)
- [14] Török J, Iñiguez G, Yasseri T, San Miguel M, Kaski K, Kertész, J. (2013) Opinions, conflicts, and consensus: modeling social dynamics in a collaborative environment. *Phys. Rev. Lett.* 110: 088701. [46](#)
- [15] Iñiguez G, Török J, Yasseri T, Kaski K, Kertész J (2014) Modeling social dynamics in a collaborative environment. *EPJ Data Sci.* 3: 1-20. [46](#)
- [16] Lorenz J, Rauhut H, Schweitzer F, Helbing D (2011) How social influence can undermine the wisdom of crowd effect. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 108: 9020-9025. [46](#)
- [17] Mavrodiev P, Tessone C J, Schweitzer F (2013) Quantifying the effects of social influence. *Sci. Rep.* 3: 1360.
- [18] Moussaïd M, Kaemmer JE, Analytis PP, Neth H (2013) Social influence and the collective dynamics of opinion formation. *PLoS ONE* 8: e78433. [46](#), [48](#), [50](#), [52](#), [60](#), [62](#)
- [19] Yaniv I (2004) Receiving other people's advice: Influence and benefit. *Org. Behav. Human Decis. Proc.* 93: 1-13. [46](#)
- [20] Soll J, Larrick R (2009) Strategies for revising judgment: How (and how well) people use others' opinions. *J. Exper. Psychol.* 35: 780-805. [46](#)
- [21] Silverman MP (2014) *A Certain Uncertainty: Nature's Random Ways*. Cambridge, UK: Cambridge University Press. [48](#)
- [22] Deffuant G, Neau D, Amblard F, Weisbuch G (2000) Mixing beliefs among interacting agents. *Adv. Compl. Sys.* 3: 87-98. [55](#), [63](#)
- [23] Weisbuch G, Deffuant G, Amblard F, Nadal J P (2002) Meet, discuss and segregate. *Complexity* 7: 55-63.
- [24] Deffuant G, Amblard F, Weisbuch G, Faure T (2002) How can extremism prevail? A study based on the relative agreement model. *J. Artif. Soc. Soc. Simul.* 5: 4.
- [25] Laguna M F, Abramson G, Zanette D (2004) Minorities in a model for opinion formation. *Complexity* 9: 31-36. [55](#), [63](#)
- [26] Kacperski K, Holyst J A (2000) Phase transitions as a persistent feature of groups with leaders in models of opinion formation. *Physica A* 287: 631-643. [58](#)

-
- [27] Boccara N (2008) Models of opinion formation: Influence of opinion leaders. *Int. J. Mod. Phys. C* 19: 93-109. [59](#)
 - [28] Albi G, Pareschi L, Zanella M (2014) Boltzmann-type control of opinion consensus through leaders. *Phil. Trans. Royal Soc. A* 372: 138. [58](#)
 - [29] Knowles E S, Linn J A (2004) *Resistance and Persuasion*. Mahwah, NJ: Erlbaum. [61](#)
 - [30] Ghaderi J, Srikant R (2014) Opinion dynamics in social networks with stubborn agents: Equilibrium and convergence rate. *Automatica* 50: 3209-3215. [61](#)
 - [31] Cohen G L, Sherman D K (2007) Self-affirmation theory, in Baumeister R, Vohs K, *Encyclopedia of Social Psychology*. Thousand Oakes: Sage Publications. [61](#)

Capítulo 5

Juegos evolutivos con payoff no monotónico. Una variación de la batalla de los sexos

En la naturaleza, muchas especies muestran patrones de comportamiento conflictivo entre machos y hembras al involucrarse en relaciones de apareamiento. En general, el comportamiento de los machos ha evolucionado para desear esto sin importar ningún costo. Al contrario, las hembras se inclinan más por asegurarse una descendencia viable. Esta situación lleva a conflictos entre ambos sexos en lo que respecta a lo que cada uno invierte al convertirse en padres. La crianza de las crías requiere un considerable gasto de tiempo y energía, que cada padre podría intentar minimizar a expensas del otro.

La especie humana, por ejemplo, requiere intensa cooperación para criar niños hasta la adultez [1]. Han evolucionado como criadores cooperativos, y la presencia de ayuda es usualmente esencial para ser capaces de criar descendencia. Pero el conflicto que surge de la crianza no es el único en los humanos. Siempre que la fertilización sea interna [2], las hembras tienen el riesgo de ser abandonadas aun después de dar a luz a su crías. Además así como las hembras producen relativamente pocos gametos grandes, los hombres producen muchos gametos chicos, lo que hace que las hembras queden mucho mas comprometidas a criar mientras que el hombre esta en una mejor posición para el abandono. Los hombres pueden invertir tiempo y energía que no es usado en la crianza incrementando sus crías con numerosas parejas. La estrategia del hombre es entonces lograr un encuentro rápido y corto con la hembra. Por el otro lado la hembra necesita adoptar una estrategia contraria para evitar el abandono, y lograr un compromiso a largo plazo luego de haber copulado. En la misma linea, en [3] el autor apunta a que el sexo con alto grado inversión paternal, asociado con el tiempo y la energía invertido en la cría, será más selectivo con la elección de la pareja. Fue observado que en general las mujeres buscan obtener una relación estable, a diferencia

del hombre quien trata de seducir a la mujer buscando una compañera sexual [4]. Las mujeres usualmente no aceptan proposiciones de sexo casual con extraños, y van por un proceso de selección bastante más selectivo antes de dar el consentimiento para la actividad sexual [5–8]. Este comportamiento dominante puede haber sido moldeado socialmente, y parece estar arraigado en los caminos de la evolución. La complejidad de la situación es suficientemente interesante para intentar un modelado matemático. La teoría de juegos provee un marco adecuado para discutir el juego de estrategia conocido con el nombre de batalla de los sexos [9]. Formulando un juego de 2×2 (dos jugadores, dos estrategias cada uno) donde las estrategias del hombre son ser “fiel” o no serlo, mientras que las estrategias de la mujer son ser “tímida” o no serlo, fue demostrado que en población de hembras tímidas los hombres deben ser fieles [2]. Entre hombres fieles, sin embargo, no pagaría ser una hembra tímida. A partir de estas consideraciones, en este trabajo estudiaremos un juego con hombres y mujeres con dos posibles estrategias cada uno. Llamamos a esas estrategias directa (D) e indirecta (I), en asociación con los pares de estrategias fieles – no fieles y tímidas – no tímidas para hombres y mujeres respectivamente.

En un juego evolutivo, los jugadores involucrados pueden cambiar sus estrategias actuales cuando las encuentran poco ventajosas. La dinámica de cambio es usualmente asociada con un proceso de imitación donde el vecino más exitoso es imitado. Sin embargo, se ha demostrado [12] que en algunas situaciones particulares la mejor estrategia es imitar estrategias que son opuestas a las estrategias del vecindario. Además, el role de dinámica de imitación como un proceso que maximiza el payoff ha sido cuestionado a través de algunos resultados experimentales que observaron que los humanos pueden imitar incluso cuando esto redundaría en un decremento de sus chances de suceso [13]. Analizando la evolución de cooperación en sistemas extendidos, Szolnoki et al [14, 15] han propuesto una dinámica no con reglas de imitación al jugador con mas suceso, sino donde los jugadores imitan el perfil emocional de cualquier otro. En este caso en particular, el perfil emocional esta definido por dos probabilidades asociadas con la cooperación respectivamente con un vecino mas o menos exitoso. En este trabajo asumimos que la elección de estrategia no es necesariamente dominada por el deseo de una alta recompensa. En cambio se ve afectada por el estado de autoconfianza de cada individuo en particular y por la influencia social. Lo primero esta asociado con un estado interno de los jugadores basados en sus registros de logros o fallas personales. Mientras tanto, la influencia social esta conectada a una tendencia a imitar a la mayoría.

Asumimos que los individuos involucrados en una partida del juego se benefician estableciendo una relación, que prosperará solo si los dos coinciden en la elección de sus respectivas estrategias. Un hombre abandonará su intento directo si la mujer no esta inmediatamente dispuesta, y una mujer precavida en general no aceptará el acercamiento

por parte de un hombre sin otra intención que el acto sexual. Un proceso similar ha sido previamente estudiado dentro del marco de la teoría de juegos en [16, 17], donde los autores presentan un juego secuencial. El foco de estos estudios estuvo puesto en el costo debido al tiempo de espera para copular. También se incluyeron algunas consideraciones acerca de la preocupación de la mujer por la disposición del varón por cuidar a los hijos después de copular.

Como se mencionó antes, consideraremos una estrategia dinámica no directamente conectada al payoff pero si al estado interno del individuo y de su entorno social. Asumimos que la elección de la estrategia es afectada por la autoconfianza del individuo, la cual puede ser definida como el conjunto de pensamientos, percepciones y sentimientos acerca de si mismos, construido a partir de la experiencia acumulada de cada interacción social a lo largo de sus vidas [18]. Esta auto evaluación afecta directamente la manera en como nos relacionamos con otros y como nos comportamos en entornos sociales. Las personas con diferentes niveles de autoconfianza responden diferente a la hora de enfrentar el mismo reto social [5, 19]. La auto confianza, además crece cuando un individuo amplía su registro de interacciones exitosas. En el caso de interacciones hombre - mujer, este hecho promueve el acercamiento directo de los hombres y la estrategia opuesta en las mujeres quienes se vuelven mas selectivas a la hora de elegir pareja. En otras palabras, mientras mas exitosos son los jugadores están más inclinados a jugar su estrategia favorita. Con la idea de representar esos aspectos, introducimos un juego evolutivo donde la probabilidad de que un individuo adopte una estrategia depende de su auto confianza. A su vez, la autoconfianza es una función de la experiencia acumulada (o score) del jugador. Adicionalmente, consideramos la posibilidad de que los hombres imiten estrategia como un efecto de la influencia social. La influencia social ha sido descripta y probada en varios trabajos, tales como el del pionero Festinger [20].

En la siguiente sección se introduce la formulación matemática de nuestro modelo seguido por resultados numéricos y analíticos.

5.1. El juego

A continuación, se considera el juego de la batalla de los sexos [9] (ver también el capítulo 2). En la formulación tradicional de este juego, dos jugadores – digamos Agustín y Belén – tratan de decidir como van a pasar sus vacaciones juntos. Agustín prefiere ir a la playa, pero Belén esta interesada en ir a la montaña. Sin embargo, a pesar de estar en desacuerdo, ambos quieren estar juntos. Como un caso especial de la batalla de los sexos, se quiere estudiar un juego con dos jugadores, hombres y mujeres, cada uno de ellos con dos posibles estrategias, directo (D) o indirecta (I). Como se dijo en la sección anterior, las dos estrategias están respectivamente relacionadas a actitudes sociales mas abiertas o más reservadas. La matriz de payoff se muestra en la

Tabla 5.1. Las estrategias de coordinación $\{D,D\}$ y $\{I,I\}$, las cuales son interacciones exitosas, son más convenientes para ambos jugadores que las otras dos combinaciones, también es claro, como se dijo antes, que el hombre prefiere D y la mujer I.

Hombre \ Mujer	D	I
D	2, 1	-1, -1
I	-2, -2	1, 2

Tabla 5.1: Matriz de payoff de la batalla de los sexos que concediéramos en el texto.

En este juego las ecuaciones del replicador [2] para las probabilidades m_D y f_D en las cuales hombres y mujeres juegan D, son

$$\begin{aligned}\dot{m}_D &= 2m_D(1 - m_D)(3f_D - 1), \\ \dot{f}_D &= 2f_D(1 - f_D)(3m_D - 2).\end{aligned}\tag{5.1}$$

En esta situación, hay un equilibrio de Nash mixto con probabilidades $m_D = 2/3$ y $f_D = 1/3$, además de un equilibrio de Nash puro $\{0, 0\}$ y $\{1, 1\}$. En la Fig. 5.1a, se muestra un diagramas de flujos en el plano (m_D, f_D) correspondiente a las ecuaciones (5.1).

Sin embargo, como ya se dijo, estamos interesados en una dinámica de diferente tipo, inspirada en los efectos de la autoconfianza durante la interacción hombre - mujer. Se asume que cada individuo juega su estrategia preferida (D para el hombre, I para la mujer) con una frecuencia que se incrementa a medida que la autoconfianza crece. Además, se propone que la autoconfianza esta determinada por el grado de éxito (i.e. el payoff total) en previas jugadas. La probabilidad m_D de que un hombre juegue D esta asociada con la confianza, y debe incrementarse a medida que el payoff total crece. Mientras tanto, la probabilidad f_D de una mujer de jugar en forma directa D esta relacionada a su predisposición al acercamiento abierto, y debería decrecer con su payoff total. Se llama Φ_M y Φ_F a los payoff totales de hombres y mujeres respectivamente, y teniendo en cuenta que las probabilidades m_D y f_D deben quedar acotadas al intervalo

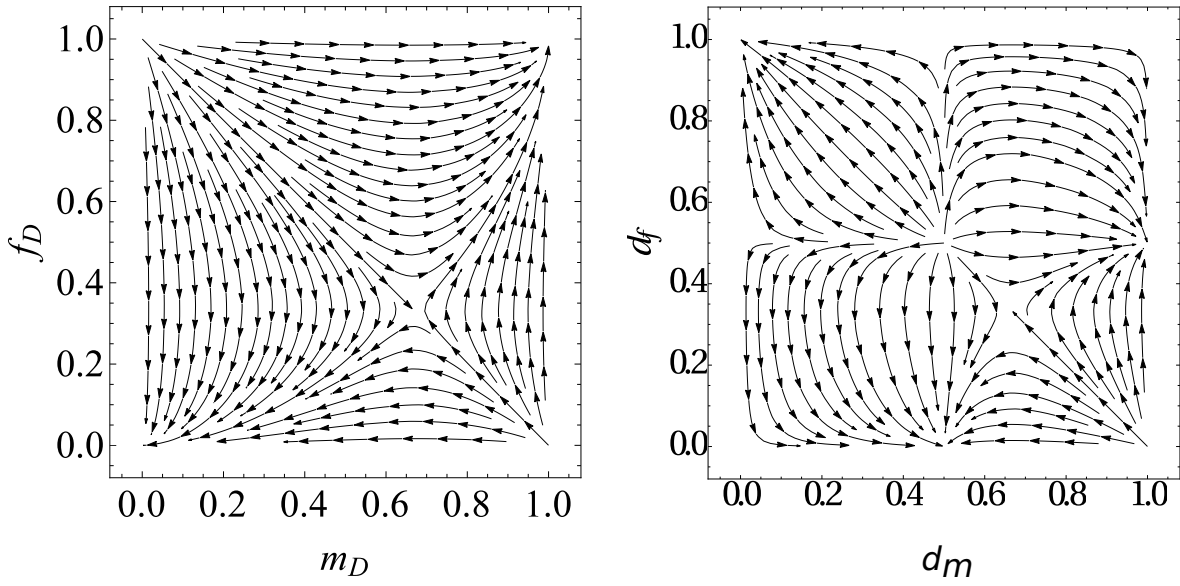


Figura 5.1: Diagramas de flujo para el juego en plano de probabilidades de estrategia directa para el hombre (m_D) y para la mujer (f_D), donde se corresponde (a) con la dinámica del replicador de ecuaciones (5.1), y (b) dinámica de autoconfianza ecuaciones (5.5). En el panel derecho del gráfico se indican las zonas que se eligieron como condición inicial para realizar las simulaciones numéricas 5.2.

$[0, 1]$, se escogieron las funciones sigmoideas

$$m_D = \frac{1}{2} [1 + \tanh(\Phi_M - 1/2)], \quad (5.2)$$

$$f_D = \frac{1}{2} [1 - \tanh(\Phi_F - 1/2)].$$

Las variaciones de m_D y f_D son entonces gobernadas por la evolución de $\Phi_{M,F}$ el cual, en cambio, esta dado por el payoff en cada partida del juego. Específicamente se tiene

$$\dot{m}_D = \dot{\Phi}_M \frac{dm_D}{d\Phi_M} = \phi_{m_D} \frac{dm_D}{d\Phi_M}, \quad (5.3)$$

y

$$\dot{f}_D = \dot{\Phi}_F \frac{df_D}{d\Phi_F} = \phi_{f_D} \frac{df_D}{d\Phi_F}. \quad (5.4)$$

Donde ϕ_{m_D} y ϕ_{f_D} son respectivamente el promedio del payoff del hombre y la mujer cuando juegan D con probabilidades m_D y f_D . Poniendo todo eso en términos de m_D y f_D , se tiene

$$\dot{m}_D = 2m_D(1 - m_D)(1 - 2m_D - 3f_D + 6m_D f_D), \quad (5.5)$$

$$\dot{f}_D = 2f_D(1 - f_D)(-2 + 3m_D + 4f_D - 6m_D f_D).$$

Estas ecuaciones tienen diez puntos fijos, cinco de ellos coinciden con los de la ecuación (5.1). La figura 5.1b muestra el diagrama de flujos en el plano (m_D, f_D) .

Es notable que el equilibrio de Nash de la batalla de los sexos deja de ser estable bajo las ecuaciones (5.5). Esto define una importante distinción entre la dinámica del replicador y la dinámica de autoconfianza propuesta. La dinámica del replicador es un caso especial de una amplia familia de dinámicas de imitación llamadas *payoff monótonas* [22]. En una serie de teoremas [2, 22], se prueba que para las ecuaciones payoff monótonas (i) Los equilibrios de Nash son puntos fijos, (ii) El equilibrio de Nash estricto es asintóticamente estable, y (iii) los puntos fijos estables son un equilibrio de Nash. Como estos enunciados no son ciertos para las ecuaciones (5.5), se concluye que la dinámica de cortejo propuesta guiada por la dinámica de autoconfianza es payoff no monótona, aún siendo estas derivadas de consideraciones de comportamiento social.

5.2. Resultados numéricos y el efecto de la imitación

Las ecuaciones (5.5) fueron formuladas asumiendo que el payoff total de cada individuo evoluciona de acuerdo al payoff promedio a cada jugada. Por lo tanto, estas no necesariamente capturan el efecto microscópico de las fluctuaciones. Además, estrictamente hablando, estas ecuaciones describen la evolución de las probabilidades de estrategia para una sola pareja hombre-mujer, y se considera que puede ser más interesante analizar la dinámica social colectiva de una población donde muchos individuos de ambos sexos tengan repetidas oportunidades de involucrarse en el proceso. Estos aspectos pueden ser abordados realizando simulaciones numéricas basadas en agentes.

Se consideraron diferentes tamaños de poblaciones de entre 200 y 2000, con un igual número de hombres y mujeres para quienes se asignó una probabilidad de jugar D m_D y f_D respectivamente, que al mismo tiempo representa los niveles de autoconfianza de los agentes masculinos y lo que llamaremos “predisposición” de los femeninos. Un paso de tiempo consiste en N encuentros al azar, en cada ronda cada jugador debe decidir si escoger la estrategia que es más favorable para el/ella o no. La elección de la favorable se hace con probabilidad m_D y $1 - f_D$. Como resultado del encuentro, el payoff de cada gente involucrado se modifica, lo cual a su vez de acuerdo a la ecuación 5.2, afecta los valores de m_D y f_D . Cabe aclarar que no se están considerando un juego persistente entre un hombre y una mujer, luego de un encuentro ambos jugadores son candidatos para una nueva elección.

Inicialmente cada estrategia del hombre o la mujer es definida al azar con valores tomados desde una distribución uniforme. Como se observará más adelante los posibles valores oscilaron entre 0 y 1, pero para algunos casos particulares se adoptó un rango más corto.

Primero se estudió la evolución de la población con estrategias concentradas en cada una de las cuatro regiones indicadas en la figura 5.1 (b). Desde cualquiera de esas condiciones iniciales, el perfil de estrategias de supervivencia se corresponde con

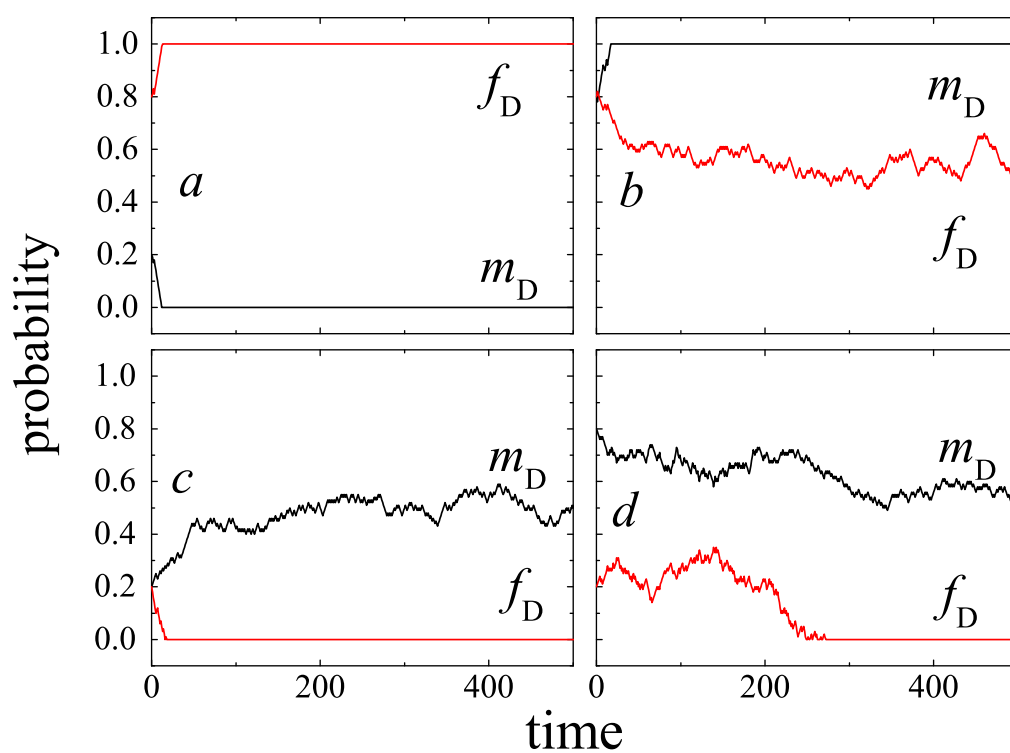


Figura 5.2: Simulaciones numéricas para la dinámica de autoconfianza. Cuatro realizaciones para condiciones iniciales en distintas zonas de la figura 5.1 (b). Los rótulos *a* a *d* indican las zonas correspondientes.

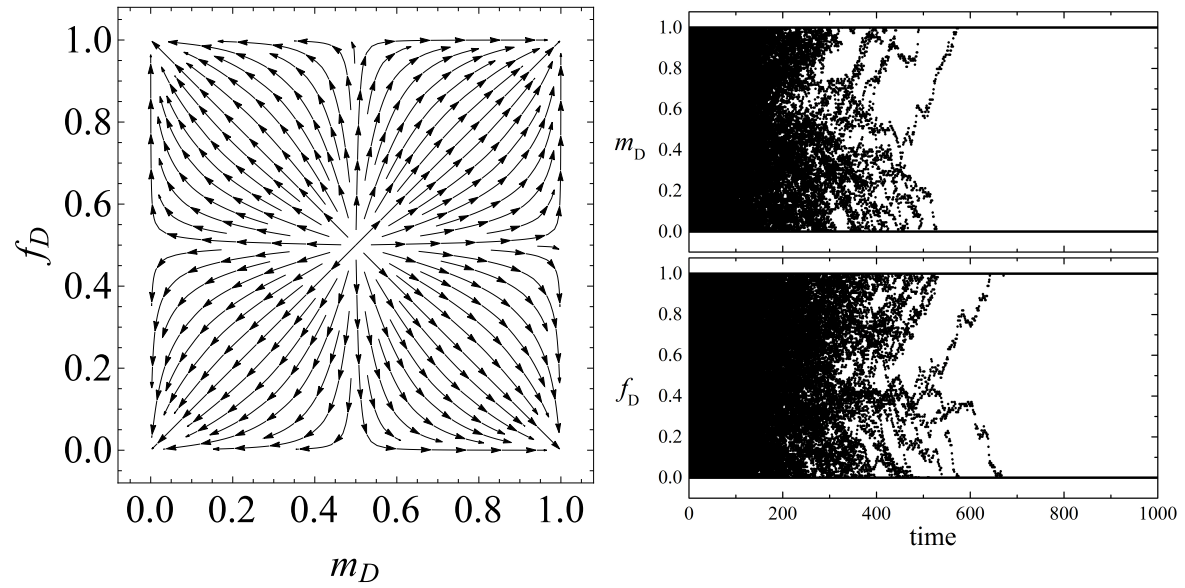


Figura 5.3: Panel izquierdo: Diagrama de flujos par alas ecuaciones (5.6). Panel derecho: Evolución de la probabilidad de la estrategia directa en las simulaciones numéricas para una población de 2000 agentes, para hombres (m_D) y mujeres (f_D). Las probabilidades iniciales fueron uniformemente distribuidas en el intervalo $(0, 1)$.

uno de los puntos fijos estables de las ecuaciones (5.5). Empezando desde las condiciones iniciales rotuladas como a , el sistema converge a $(0, 1)$; empezando desde b , a $(1, 1/2)$; empezando desde c o d , a $(1/2, 0)$. Para esas condiciones iniciales localizadas, por consiguiente, las simulaciones numéricas están de acuerdo con el comportamiento esperado que se deriva de las ecuaciones.

Sin embargo esta situación es diferente cuando se empieza con una distribución uniforme entre 0 y 1. En ese caso, las simulaciones numéricas muestran que la población de hombres se divide en dos grupos similares, uno de estos converge a $m_D = 0$ y el otro a $m_D = 1$. La población femenina muestra el mismo comportamiento para f_D . Este resultado puede ser entendido notando que, debido a la simetría de la condición inicial, el sistema se comporta a todo tiempo como si cada hombre y mujer viera a la población del sexo opuesto adoptando la estrategia promedio, $f_D = 1/2$ y $m_D = 1/2$, respectivamente. En efecto, si se reemplaza ese valor en cada una de las ecuaciones (5.5), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{m}_D &= -2m_D(1 - m_D)(1/2 - m_D), \\ \dot{f}_D &= -2f_D(1 - f_D)(1/2 - f_D). \end{aligned} \tag{5.6}$$

El gráfico de flujos que se muestra en la figura 5.3 (izquierda), está de acuerdo con las observaciones numéricas. La figura 5.3 (derecha) muestra la evolución de las estrategias individuales de cada agente en una sola realización.

Para tener en cuenta el efecto de la influencia social, en la forma de imitación, se introduce el valor q que fija en cada jugada la probabilidad de que los jugadores

hombres cambien su estrategia adoptando la probabilidad de otro hombre elegido al azar, en lugar de la suya. Para $q = 0$, se re obtiene el modelo original y en efecto, cuando q se vuelve lo suficientemente chica, el comportamiento colectivo es el mismo de antes. En particular, para probabilidades uniformemente distribuidas, la población de ambos sexos se divide en dos grupos similares que se acercan asintóticamente a los valores extremos. Con la idea de hacer una comparación con otras instancias, se llama a ese comportamiento asintótico caso A .

Por otro lado, a medida que la probabilidad de imitación se hace más grande, emerge otro tipo de comportamiento asintótico. En algunas de las realizaciones, toda la población de hombres converge a $m_D = 0$ mientras que la población femenina permanece dividida en dos grupos que convergen a las probabilidades extremas (caso B). Asimismo se observa el caso de toda la población masculina convergiendo a $m_D = 1$ y la femenina a $f_D = 1/2$ (caso C). A medida que crece q , la frecuencia de casos A decrece en forma monótona, mientras que las frecuencias de los casos B y C que son estadísticamente idénticos al otro caso, decrecen. La figura 5.4 muestra la fracción de realizaciones que terminan en cada uno de los tres casos, como una función de q . Se corrieron 1000 simulaciones por cada valor de q . El recuadro muestra los resultados para diferentes tamaños de la población, mientras que el gráfico principal muestra el colapso obtenido para un reescaleo de tamaño finito estándar. Se observa una transición bien definida a $q_0 \approx 0,87$, con exponente crítico $\gamma = 0,2$.

Como es esperado, suficiente frecuencia de imitación entre hombres lleva al total de la población a jugar una estrategia común y pura. Para una distribución inicial uniformemente distribuida, los dos valores extremos $m_D = 0$ y 1 son igualmente probables, lo cual sugiere que el estado asintótico es controlado por las fluctuaciones microscópicas en la distribución inicial de estrategias. Es interesante notar que esas dos estrategias puras asintóticas tienen una contra parte colectiva mixta en la población de mujeres: Para $m_D = 0$, cada mujer adopta indistintamente $f_D = 0$ o 1 , mientras que para $m_D = 1$ todas las mujeres eligen su estrategia con igual probabilidad, $f_D = 1/2$. Esta diversidad de comportamiento debe ser atribuido a la naturaleza de payoff no monótono del juego.

5.3. Enfoque analítico

En esta sección se introduce un conjunto de ecuaciones diferenciales tipo campo medio para el sistema estudiado numéricamente en la sección anterior. El objetivo es proveer un enfoque analítico de los resultados obtenidos cuando se incluye la influencia social y más específicamente para chequear la existencia de la transición entre los diferentes regímenes que se muestran en la figura 5.4. Se ha observado que cuando $q = 0$ el valor medio de las probabilidades de jugar en forma directa, para ambos sexos, es $\bar{m}_D = \bar{f}_D = 1/2$. Estos valores son también validados por el caso A , mientras que para

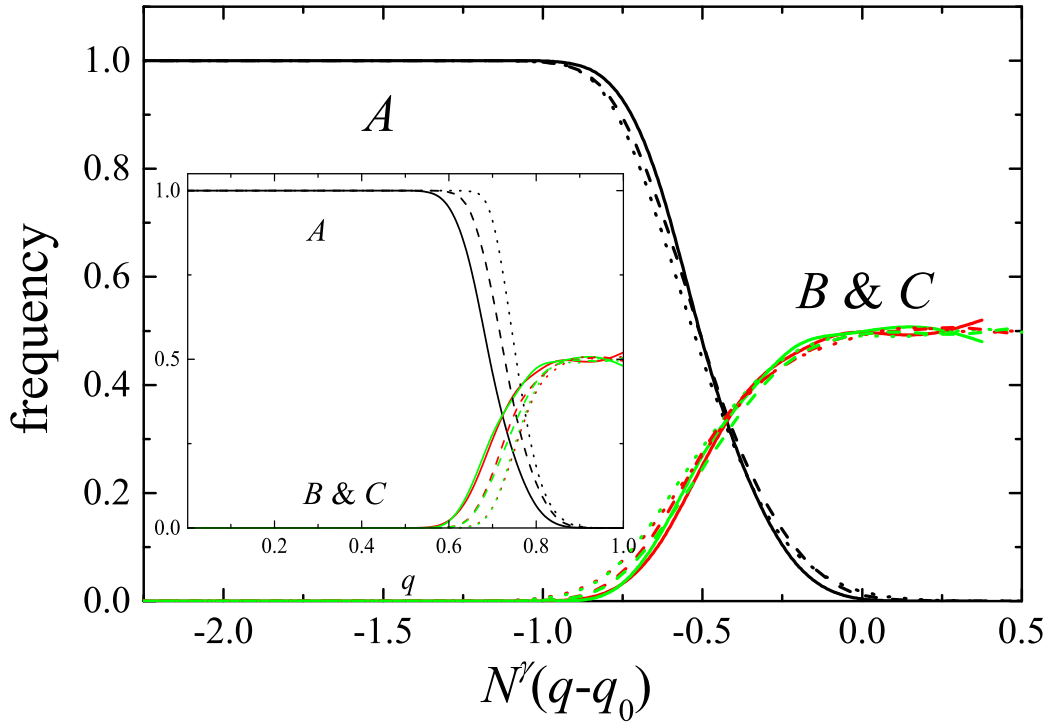


Figura 5.4: Frecuencias de cada uno de los tres posibles estados asintóticos descritos en el texto (A , B y C) como función de la probabilidad de imitación q , resultado de 1000 realizaciones para cada valor de q . Las diferentes curvas se corresponden con tamaños del sistema de $N = 200$ (línea), 600 (línea discontinua) y 2000 (líneas de puntos) agentes. El gráfico principal muestra el colapso de las curvas debido al efecto de tamaño finito, con los parámetros críticos $\gamma = 0,2$ y $q_0 = 0,87$, mientras que el recuadro muestra los resultados en bruto.

los casos B y C se ha encontrado que $(\bar{m}_D, \bar{f}_D) = (0, 1/2)$ y $(1, 1/2)$, respectivamente.

Se asume que el comportamiento dinámico de cada individuo puede ser entendido como si cada jugador estuviese confrontándose con un oponente virtual quien adopta la estrategia media de la población. Luego, cada hombre juega contra una mujer adoptando $f_D = \bar{f}_D$, mientras que cada mujer juega contra un hombre adoptando $m_D = \bar{m}_D$. Además, la tendencia de los hombres a ser afectada por el entorno social es cuantificada por el parámetro q que define la probabilidad de los hombres de jugar \bar{m}_D a pesar de su propia estrategia. Con esas suposiciones, las ecuaciones tipo campo medio se leen

$$\begin{aligned} \dot{m}_D &= (m_D - 1)m_D(3\bar{f}_D - 1) \\ [1 - 2(1 - q)m_D - 2q\bar{m}_D] &\equiv F(m_D) \end{aligned} \quad (5.7)$$

con puntos fijos en $m_D = 0$, $m_D = (1 - 2q\bar{m}_D)/2(1 - q)$ y $m_D = 1$, y

$$\dot{f}_D = (3\bar{m}_D - 2)f_D(f_D - 1)(2f_D - 1) \equiv G(f_D) \quad (5.8)$$

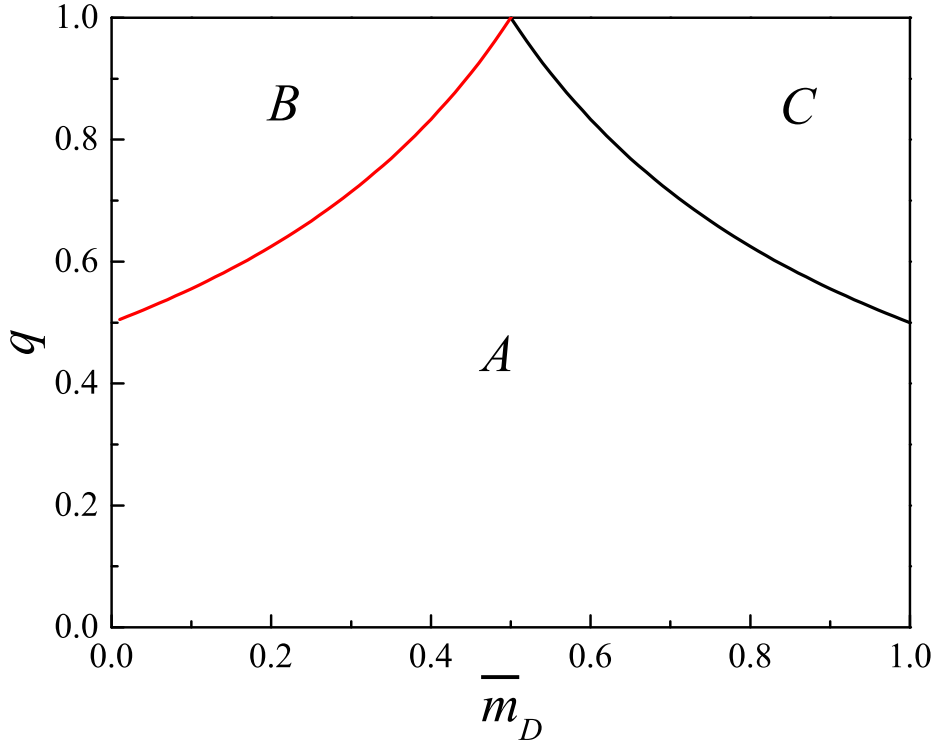


Figura 5.5: Las regiones en el plano (\bar{m}_D, q) corresponden a las diferentes propiedades de estabilidad de la ecuación (5.7). (A) $m_D = 0$ y $m_D = 1$; (B) solo $m_D = 0$ es estable; (C) solo $m_D = 1$ es estable.

con puntos fijos en $f_D = 0$, $f_D = 1/2$ y $f_D = 1$.

A continuación se evalúan los puntos fijos de las ecuaciones de arriba. Como a lo largo de las simulaciones \bar{f}_D siempre converge a $1/2$, se fija $\bar{f}_D = 1/2$ y se analiza la consistencia del comportamiento de la dinámica de las ecuaciones con los resultados numéricos. Resulta que $m_D = (1 - 2q\bar{m}_D)/2(1 - q)$ es inestable para cualquier valor de q y \bar{m}_D . Para la estabilidad de los otros dos equilibrios, la figura 5.5 muestra tres regiones en el plano (q, \bar{m}_D) , a las cuales se les dio el nombre de A, B y C ya que estas están en correspondencia con los casos que se describen en la sección anterior. En la región A, tanto $m_D = 0$ y $m_D = 1$ son estables, mientras que en B y C solo uno de los dos equilibrios es estable, $m_D = 0$ y $m_D = 1$ respectivamente. En la región B y C, además, $m_D = (1 - 2q\bar{m}_D)/2(1 - q)$ adopta valores fuera del intervalo $[0, 1]$. Consecuentemente para $q < 1/2$ los dos valores extremos de m_D son estables. Por otro lado, para $q > 1/2$ una salida de \bar{m}_D desde un $1/2$ puede llevar al sistema a seleccionar solo uno de estos dos valores. Este análisis ayuda a entender por que el estado A desaparece para valores altos de q , y por que los estados B y C no se manifiestan cuando q es bajo.

En cuanto a la estabilidad de los equilibrios de la ecuación (5.8), se encontró que cuando $\bar{m}_D < 2/3$, tanto $f_D = 0$ como $f_D = 1$ son puntos fijos estables, en cambio

$f_D = 1/2$ es inestable. Cuando $\bar{m}_D > 2/3$ las propiedades de estabilidad se invierten, y el único equilibrio estable es $f_D = 1/2$.

La compatibilidad de estos resultados analíticos con los resultados numéricos antes mostrados pueden ser evaluados como sigue. En el caso A , se tiene $\bar{m}_D = \bar{f}_D = 1/2$, tanto la población masculina como femenina se divide en dos grupos adoptando los valores extremos 0 y 1 para m_D y f_D . Esto concuerda con lo observado en los resultados para valores bajos de q . En la medida en que $\bar{m}_D < 2/3$, $f_D = 0$ y $f_D = 1$ son estables. Los resultados mostrados en la figura 5.5 en cambio, muestran que cuando $q > 1/2$, las fluctuaciones en el valor de \bar{m}_D puede hacer que el sistema salga del estado A .

En el caso de B , se tiene $\bar{m}_D = 0$ y $\bar{f}_D = 1/2$. En consecuencia, la población de mujeres se divide en dos grupos que adoptan los valores extremos de 0 y 1, mientras que los hombres se quedan con $m_D = 0$. Para $q > 1/2$, las fluctuaciones pueden conducir a todo la población de hombres a abandonar la estrategia $m_D = 1$ y a escoger solo $m_D = 0$. De nuevo, si $\bar{m}_D < 2/3$, $f_D = 0$ y $f_D = 1$ son estables. Sin embargo cuando $q < 1/2$, a menos que sea escogido una condición inicial específica, el sistema converge al estado A .

Para el caso C el análisis es análogo al caso B . Ahora se tiene $\bar{m}_D = m_D = 1$ y $\bar{f}_D = f_D = 1/2$. Cuando $q < 1/2$, $f_D = 1/2$ es inestable, y m_D se divide entre 0 y 1. De nuevo, cuando $q > 1/2$ el sistema puede converger a $m_D = 1$. Una vez que $m_D > 2/3$, el único equilibrio es $f_D = 1/2$. A pesar del hecho de que este enfoque analítico desestima los detalles microscópicos de las simulaciones numéricas, describe correctamente el comportamiento colectivo de las dos poblaciones en los tres casos, y para pequeños y grandes valores de la probabilidad de imitación.

5.4. Conclusiones

En este trabajo, se presentó un juego de evolución inspirado en la batalla de los sexos que se presenta en [2]. En este juego a ambos jugadores les va mejor si escogen la misma estrategia, es decir actuando en forma coordinada, pero donde al mismo tiempo hay algunas restricciones, aún cuando la mejor opción para ambos jugadores es actuar coordinados, esta no coincide con la estrategia individual óptima. En consecuencia, la coordinación requiere de algún tipo de concesión de al menos uno de los jugadores. Esta situación típica es representada en la batalla de los sexos. Éste juego ha sido extensamente analizado debido al interés que viene del hecho que tiene dos equilibrios de Nash, reflejando elecciones racionales de los jugadores. Los jugadores racionales estarían de acuerdo con que el resultados tipo no equilibrio de Nash son desventajosos, y que el equilibrio de Nash, aunque uno sea inferior al del otro en la opinión de cada jugador, es la opción más razonable. Ningún jugador querría producir un desacuerdo que lleve a un resultado tipo no Nash, aún si esto implica conflictos. En la población

de jugadores, esta racionalidad queda bien descripta por la dinámica del replicador.

En nuestro caso el interés esta puesto en incluir irracionalidad pero con motivaciones cuantificables en los jugadores. Entonces, se propuso una dinámica diferente en la cual se mantiene la posibilidad de que los jugadores coordinen entre si para relacionarse. Después de cada interacciones no exitosa, cada jugador modificará su estrategia volviendo mas indulgente hacia sus pares opuestos, aún al costo de moverse hacia su estrategia menos favorita. En ausencia de imitación, la dinámica queda relacionada solo al historial personal de los agentes. La dinámica propuesta se convierte en una no monótona en payoff. Este hecho induce un comportamiento completamente diferente al obtenido bajo la dinámica del replicador. Se verificó la aparición de diferentes equilibrios en la dinámica y el cambio en la estabilidad respecto al anterior. En efecto, una de las características más interesantes es que el equilibrio de Nash deja de ser estable bajo esta dinámica. Para algunas condiciones iniciales, de hecho, la dinámica lleva a la población hacia la situación más desfavorable. Las decisiones adoptadas por los jugadores hacen que terminen en una situación no querida, lejos del resultado ideal de coordinación.

Promoviendo la inclusión de influencia social en los hombres, en la forma de imitación, se suma otra característica interesante en el comportamiento del sistema. Sintoniando la intensidad de la tendencia a imitar, se observó una transición entre comportamientos asintóticos cualitativamente diferentes. Mientras que la tendencia a imitar es baja, la población de ambos sexos se divide en grupos similares que se acercan asintóticamente a los valores extremos. Cuando la intensidad de la imitación entre hombres se vuelve grande, toda la población masculina es llevada hacia una estrategia común pura. La elección del estado final es gobernada por fluctuaciones microscópicas en la distribución inicial de estrategias. La coordinación parece mejorar a medida que la información es compartida: mientras los hombres adoptan una estrategia unificada, las mujeres fallan en lograr la correspondiente estrategia coordinada que maximice su payoff colectivo. Esta desviación de la racionalidad se refleja en el carácter no monótono de payoff del juego presente.

Además de mostrar que la dinámica aquí considerada es no monótona en payoff, se analizaron las coincidencias y discrepancias entre las simulaciones numéricas y la aproximación tipo campo medio realizada en este modelo basado en agentes. Mientras una cruda comparación entre estos dos enfoques lleva a fuertes discrepancias, se ha mostrado que cuando se consideran algunas aproximaciones y suposiciones basadas en los resultados numéricos y se realimenta la formulación de campo medio con estos, se encuentran resultados compatibles. Esto, sirve para entender mejor la ocurrencia de la transición observada y del equilibrio.

Bibliografía

- [1] S. Hrdy, *Mother Nature: A History of Mothers, Infants and Natural Selection*, (Pantheon, New York, 1999) [73](#)
- [2] J. Hofbauer, K. Sigmund, *Evolutionary Games and Population Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1998) [73](#), [74](#), [76](#), [78](#), [84](#)
- [3] R.L. Trivers, *Parental investment and sexual selection*. In B. Campbell (Ed.), *Sexual selection and the descent of man*, 1871 (Aldine, Chicago, 1972). [73](#)
- [4] D. D. Henningsen, *Sex Rol.* **50**, 481 (2004) [74](#)
- [5] R. D. Clark, E. Hatfield, *J. Psych. Human Sex.* **2**, 39 (1989) [74](#), [75](#)
- [6] M. Voracek, A. Hofhansl, M. L. Fisher, *Psychological Reports* **97**, 11 (2005)
- [7] K. Grammer, *Human courtship behaviour: Biological basis and cognitive processing*. In A. E. Rasa, C. Vogel, and E. Voland (Eds.), *The sociobiology of sexual and reproductive strategies*, 147 (Chapman and Hall, London, 1989)
- [8] B. Pawlowski, R. I. M. Dunbar, *Proc. R. Soc. B* **266**, 281 (1999) [74](#)
- [9] R. D. Luce, H. Raiffa, *Games and Decisions: Introduction and Critical Survey*. (Dover Publications, Reading, 1989) [74](#), [75](#)
- [10] D. M. Buss, D.P. Schmitt, *Psychological Review* **100**, 204 (1993)
- [11] D. P. Schmitt, T. K. Shackelford, J. Duntley, W. Tooke, D. M. Buss, *Personal Relationships* **8**, 425(2001)
- [12] C. Hauert, M. Doebeli, *Nature*, **428**, 643 (2004) [74](#)
- [13] R. Cook, G. Bird, G. Lünser, S. Huck, C. Heyes, *Proc. R. Soc. B* **246**, 91 V95.(2011) [74](#)
- [14] A. Szolnoki¹, N. G. Xie, C. Wang, M. Perc, *Eur. Phys. Lett* **96**, 38002 (2011) [74](#)
- [15] A. Szolnoki, N. G. Xie, Y. Ye, M. Perc, *Phys. Rev. E* **87**, 042805 (2013) [74](#)

- [16] P. D. Sozou, R. M. Seymour, *Proc. R. Soc. B* **272**, 1877 (2005) [75](#)
- [17] R. M. Seymour, P. D. Sozou, *J. Theor. Biol.* **256**, 1 (2009) [75](#)
- [18] J. L. Carroll, K. D. Volk, J. S. Hyde, *Arch. Soc. Behav.* **14**, 131 (1985) [75](#)
- [19] D. B. Anthony, J. V. Wood, J. G. Holmes, *J Exp. Soc. Psychol.* **43**, 425 (2007) [75](#)
- [20] L. Festinger, *Human Relations* **7**, 117 (1954) [75](#)
- [21] J. Maynard Smith, *Evolution and the Theory of Games* (Cambridge University Press, Cambridge, 1982)
- [22] J. Weibull, *Evolutionary Game Theory* (MIT Press, Massachusetts, 1995) [78](#)

Capítulo 6

Efectos de la topología de red en la pérdida de información de un sistema de transmisión con probabilidad de error

En los últimos años se ha establecido muy bien el rol de la teoría de redes complejas como una herramienta matemática para formalizar la topología que subyace en varios fenómenos de propagación. Cuando se busca modelar problemas de propagación de enfermedades, opiniones, rumores, ideas, etc; la teoría de redes complejas provee una extensa cantidad de topologías alternativas que sirve para modelar el complejo tejido de las relaciones interpersonales [1, 3–5].

A un nivel más abstracto, la difusión en general es uno de los procesos de transporte fundamentales que tienen lugar en las redes [6–8]. En este contexto, un caso particularmente interesante es la difusión del flujo de información entre nodos de una red, donde un grafo es casi una perfecta representación del soporte real subyacente sobre el cual fluye la información.

En los sistemas sociales, una de las características mas distintivas de las redes online tipo Twitter, Facebook o Instagram es el potencial para diseminar información a lo largo de las conexiones sociales, fenómeno que ha sido estudiado desde varios puntos de vista, con aristas en los sistemas de formación de opiniones y la conformación de consenso, entre otros [9–11]; pero que en esencia pueden ser reducidos, en un nivel más abstracto, a un problema de propagación difusiva.

Asimismo, se ha puesto mucho énfasis en el estudio del efecto de la topología de red, como medio sobre donde se produce la propagación, ya que entender que tipo de estructura favorece (o perjudica) un determinado proceso difusivo es un problema altamente no trivial. Es fácil ver que no es lo mismo la propagación difusiva en una

red con estructura tipo estrella, es decir con un nodo central y varios nodos periféricos, que en una red tipo anillo. A partir de esta idea simple y en términos más generales, podemos plantear la tesis de que la distribución de grado y la correlación entre los grados de los nodos de la red, es decir la *asortatividad* (ver capítulo 2), podría afectar de manera significativa el proceso difusivo. Otro aspecto importante es el agrupamiento de los nodos, es decir el *clustering*, ya que la presencia o ausencia de ciclos en la transmisión de información, es decir la información que se queda circulando en un grupo de nodos, pueden producir claros efectos de retardo en la propagación de la misma. Por ejemplo ha sido demostrado que en redes con estructura modular la velocidad de la propagación de información depende en forma no lineal del numero de módulos, de una manera en la cual una pieza de información se propaga más rápido sobre redes que tienen tanto un pequeño número de módulos o uno grande [13].

En capítulos anteriores hemos modelado interacciones sociales suponiendo agentes que intercambian información en forma perfecta, es decir sin error de transmisión/ interpretación que puedan afectar de manera directa los procesos de toma de decisiones. En este capítulo abordamos la idea de que la circulación de la información entre los agentes sociales pueda presentar algún tipo de degradación, error o pérdida y atacaremos el tema desde un punto de vista abstracto utilizando teoría de redes complejas, lo cual nos servirá para indagar acerca de como la topología de red puede disminuir o aumentar la propagación de estos errores en la transmisión y en consecuencia evaluar la perdida de información resultante.

6.1. Acerca del modelado de los errores de transmisión

Cuando consideramos transmisión de información, el estudio de la ocurrencia de errores durante el proceso puede ser un tema altamente relevante, por lo tanto cualquier modelado realista de un proceso de transferencia de información debe incluir una posible ocurrencia de errores que puedan degradar el rendimiento del sistema. Además, es factible suponer que estos errores pueden tomar la forma de procesos aleatorios que ocurren en paralelo con la transmisión de información.

En principio estos errores pueden tener varios tipos de orígenes y afectar a distintos aspectos de una dinámica. En [2], los autores modelan una dinámica en la cual los errores afectan las direcciones hacia las cuales los paquetes de información son enviados. Por ejemplo, un paquete pudo ser enviado a un nodo aleatorio de la red en lugar de a su deseado destino, o la topología de la red puede ser perturbada por la totalidad de los paquetes que viajan a través de una región dada. Curiosamente, se encuentra que en algunos casos este tipo de ruido puede mejorar la transferencia de información

a través de un fenómeno similar a la resonancia estocástica, con una interacción no trivial entre los dos tipos de ruido.

En nuestro trabajo, nos planteamos la posibilidad de que los errores no afecten la dirección de destino de los paquetes, sino más bien su mensaje. Nuestra idea se centra en encarar el análisis de este mecanismo estudiando los motivos que llevan a la pérdida de información global consecuente, lo cual permitiría también, llegado el caso, proponer soluciones desde el punto de vista técnico.

6.2. Dinámica de transmisión

Consideraremos entonces una dinámica en la cual los paquetes de información viajan desde un nodo origen, nodo tras nodo, hasta alcanzar su nodo destino. Cada paquete de información en este sistema contiene la dirección del nodo origen, la dirección de un nodo destino y un mensaje a transmitir.

Una estrategia simple para que los paquetes se propaguen por la red puede ser planteada de la siguiente manera: si un nodo de la red quiere transmitir un paquete dado, primero se fija cual es su dirección de destino, si ésta coincide con la de uno de sus vecinos simplemente se lo entrega, si no envía el paquete a alguno de sus vecinos elegido al azar. Así este proceso se repetirá nodo tras nodo hasta que el paquete alcance su destino, cuando esto sucede el paquete sale del sistema de transmisión y se almacena en un contenedor de “recibidos”.

En nuestro modelo, cada nodo tiene la capacidad de administrar una cola (buffer), donde almacena los paquetes entrantes hasta poder re transmitirlos. Lo hace con la limitación (natural) de poder transmitir solo un paquete (el primero en la cola) por unidad de tiempo.

Consideraremos entonces la posibilidad de que en este buffer los mensajes de los diferentes paquetes puedan mezclarse o ser confundidos con otros, llevando así al sistema a emitir paquetes con mensajes erróneos. Con esta idea evaluamos dos posibles tipos de errores:

- Caso A: Un nodo que tiene que transmitir un paquete, se confunde con probabilidad p , toma al azar un paquete del buffer y envía el mensaje que contiene ese paquete, en lugar del mensaje original.
- Caso B: Un nodo que tiene que transmitir un paquete, se confunde con probabilidad p , toma al azar dos mensajes del buffer y si son iguales, envía el mensaje que contienen esos paquetes, en lugar del mensaje original.

La utilización de estas reglas se justifica como sigue. En el caso A lo que estamos haciendo es emular un simple error de confusión que puede ocurrir al mezclarse la

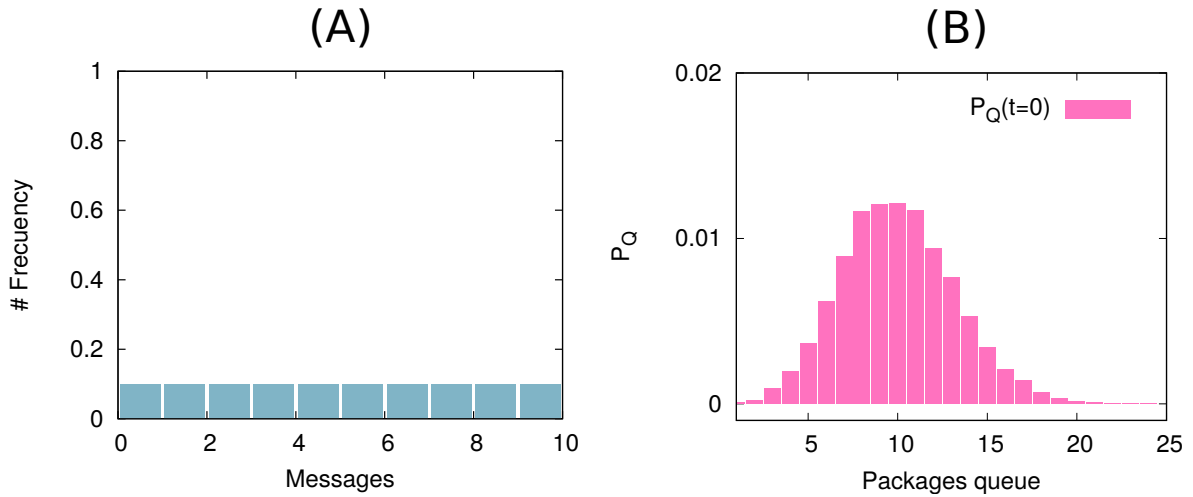


Figura 6.1: (A) Distribución inicial de mensajes. (B) Distribución de colas de paquetes en los buffers de los nodos de la red en el instante inicial.

información que se quiere enviar. El caso B es un poco menos trivial y tiene por idea emular errores en la transmisión que son causados por la presencia mayoritaria de algún tipo de mensaje en el buffer.

Si bien estas reglas pueden estar relacionadas directamente a la ocurrencia de errores del tipo tecnológico, fallas de sistema, etc. En el fondo la idea es que estas reglas también puedan ser utilizadas para modelar errores asociados a errores humanos en la administración de información.

En base a estas reglas estudiamos, por un lado, el efecto de la topología de red en la pérdida de información global del sistema, y por el otro, bajo que condiciones podemos observar efectos colectivos por los cuales la degradación de la información podría propagarse a través del sistema llevándolo a un colapso completo y a una pérdida de información total.

Es necesario notar que en el proceso de propagación de paquetes, la aparición de errores en el camino puede arrojar dos efectos observables diferentes. El primero es un efecto trivial y está directamente asociado a la probabilidad de error definida en el modelo de entregarle a un destinatario un mensaje diferente al que debería recibir. Una manera de medir este efecto es calculando la fracción de nodos que recibieron el mensaje correcto. La probabilidad de que un nodo reciba un mensaje equivocado es proporcional a la cantidad de pasos que este mensaje debió dar hasta alcanzar su destinatario. Por lo tanto, la fracción de nodos que recibieron mensajes correctos dependerá trivialmente de la probabilidad de error y de la distancia media de la red. El segundo y más interesante de los efectos está asociado a la pérdida de información a escala global. Como dijimos antes, es en este efecto en el que nos centraremos.

6.3. Implementación de la dinámica

Consideraremos redes de $N = 10000$ nodos y de grado medio $k_{med} = 6$, con tres diferentes tipos de topologías (Ver capítulo 2 para más detalles): (1) redes Small World regulares ($k - SWN$), (2) redes Small World (SWN), y (3) redes libres de escala (SFN). Cada nodo de la red es etiquetado con un identificador el cual sirve a su vez de dirección.

Con respecto a los paquetes, por cada realización de la dinámica, el número total a distribuir se estableció como $N_p = 10N$. En todos los casos, tanto la dirección del nodo origen como la del nodo destino, son escogidas uniformemente al azar entre los N nodos de la red. Por otro lado, el mensaje de cada paquete está codificado como un número entero m tal que $m = 1, 2, \dots, 10$. es decir, trabajamos con diez mensajes diferentes ($N_m = 10$). Inicialmente colocamos un número igual de paquetes con un dado mensaje, de esta manera a $t = 0$ hay repartido por toda la red N paquetes con $m = 1$, N paquetes con $m = 2$, N paquetes con $m = 3$ y así sucesivamente. El gráfico de la figura 6.1 en el panel (A) muestra la distribución inicial de mensajes, la cual por construcción es uniforme en m . En el panel (B) de esta figura se muestra la distribución inicial de colas, como puede verse es una distribución normal con media en 10, lo cual expresa que en la condición inicial la mayoría de los nodos tienen 10 paquetes en su buffer, o dicho de otra manera, el promedio de las colas de paquetes en los nodos a $t = 0$ es 10.

Como se dijo antes, paso a paso los paquetes difunden en la red hasta llegar a su nodo destino. Note que un paquete puede quedar demorado en un nodo esperando su turno de ser re transmitido, por eso haremos aquí la distinción entre tiempo de la dinámica y el número de pasos, definiendo a esto último como la cantidad de saltos entre nodos que experimenta un paquete en su recorrido.

Ya sea tanto en el caso A como en el caso B, se fijó una probabilidad de error $p = 0,02$ para todas las simulaciones. Esto provoca la aparición de paquetes corruptos a nivel individual que redundan en modificaciones globales de la distribución original de mensajes. Cabe remarcar que en nuestras simulaciones el parámetro p permaneció fijo, ya que lo que nos interesa en verdad es estudiar cuales son las contribuciones a la pérdida de información devenidas de las diferencias en la topología de las redes, y no realizar un estudio exhaustivo del efecto en la variación de este parámetro. Para cuantificar, entonces, esta pérdida de información global utilizamos la distancia Kullbak-Leibler (D_{KL}) [27], la cual definimos en el párrafo siguiente.

Distancia Kullbak-Leibler Dada dos distribuciones de probabilidad P y Q , la distancia Kullbak-Leibler se define como:

$$D_{KL} = \sum_k P(k) \log \frac{P(k)}{Q(k)} \quad (6.1)$$

Si la distribución inicial en nuestra dinámica es $Q(k) = 1/N_m$, entonces es fácil ver que el máximo valor que la distancia $K - L$ puede tomar se verifica cuando la distribución $P(k)$ se concentra en un punto $P(k) = \delta_{k,k_0}$, en este caso la distancia toma el valor $D_{KL} = \log(N_m)$.

Es de notar que este parámetro mide la pérdida de información global del sistema, sin tener en cuenta la pérdida de información “local” de los paquetes. Note que si por ejemplo en toda la dinámica se producen solo dos errores, siendo uno de ellos un paquete que cambia de mensaje $a \rightarrow b$ y otro de $b \rightarrow a$, la pérdida de información global es nula, pero los nodos destinos de estos dos paquetes reciben mensajes con información errónea.

6.4. Resultados

En esta sección presentamos los resultados obtenidos al implementar la dinámica propuesta sobre distintas topologías de red. Con esta idea dividimos la sección en tres partes, en la primera de estas se muestran lo obtenido para redes $k - SWN$, en la segunda para redes tipo SWN y en la última se muestra lo obtenido en las redes SFN .

6.4.1. Redes Small World Regulares

Una primera forma de caracterizar la pérdida de información global es a partir de la observación directa de la distribución de mensajes final. Es decir, estudiando que tan distinta es la distribución final de mensajes respecto a la distribución uniforme inicial.

En la figura 6.2 se muestra la distribución de mensajes final en los Casos A y B, para dinámicas corridas sobre distinto grado de desorden en la red. Lo que se observa es que para el caso A, independientemente del desorden, la pérdida de información global no es significativa, o al menos es mucho menor que lo que sucede en el caso B, donde para la red menos desordenada (panel (C)), la pérdida de información es casi total. En pos de explicar esa observación empírica, probaremos a continuación que en el caso A, la aparición del error no puede alterar la distribución de probabilidad de mensajes.

Denotemos como $P(m)$ a la probabilidad de tener un paquete con mensaje m . La probabilidad de que ese mensaje sea alterado de m por m' es $P(m \rightarrow m') = \rho P(m')$. De manera similar $P(m' \rightarrow m) = \rho P(m)$. La probabilidad de tener un paquete con

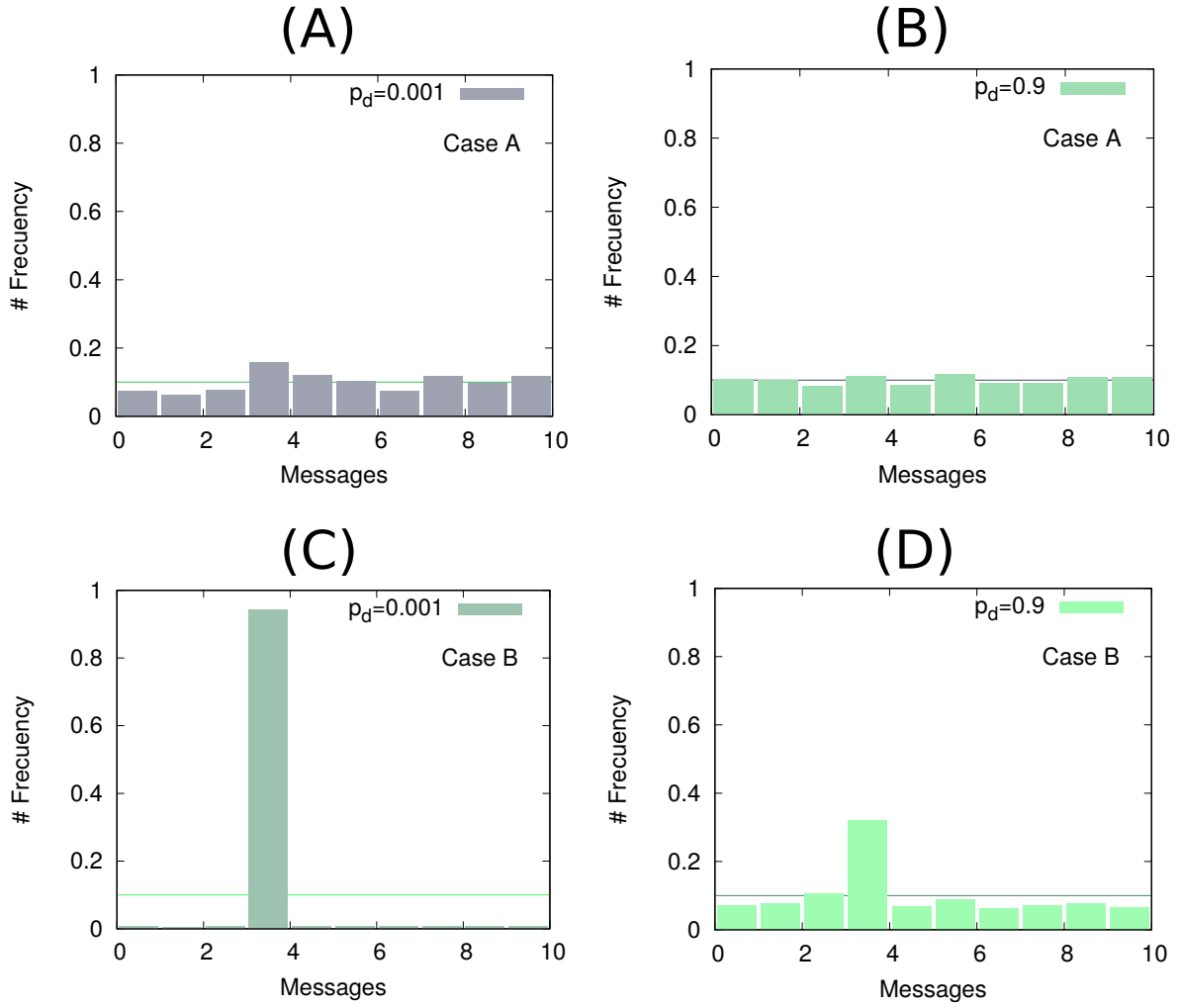


Figura 6.2: Distribuciones de mensajes finales, (A) y (B) caso A y probabilidad de desorden $p_d = 0,001$ y $p_d = 0,9$ respectivamente. (C) y (D) caso B y probabilidad de desorden $p_d = 0,001$ y $p_d = 0,9$ respectivamente. La línea horizontal de fondo corresponde a la distribución uniforme inicial.

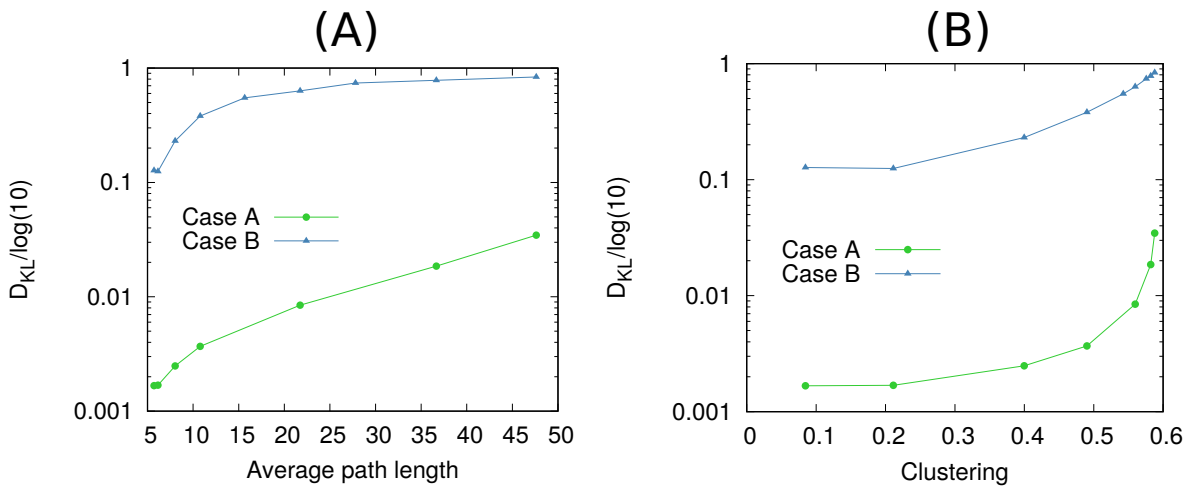


Figura 6.3: Distancia $K-L$ como función de (A) la distancia media de la red, (B) el coeficiente de clustering, Para las redes regulares $k-SWN$. Se observa que los errores de transmisión del caso B producen una pérdida de información significativamente mayor respecto al caso A.

contenido m (resp. m') en la primer posición del buffer es $P(m)$ (resp. $P(m')$). Por lo tanto, el número de paquetes que cambian su contenido de m a m' es en promedio $N_p P(m) P(m \rightarrow m') = N_p \rho P(m) P(m')$ lo cual es exactamente el número de mensajes que cambia de m' a m . Esto implica que la distancia $K - L$ no debe ser afectada por la propagación del error en este caso.

Por otro lado, estamos interesados en cuantificar los efectos del clustering y de la distancia media de la red en la pérdida de información global del sistema. Principalmente porque es una forma directa de relacionar esto último con los parámetros topológicos característicos de este tipo de redes. En la figura 6.3 se muestra, para los casos A y B, la relación entre la distancia $K - L$, la distancia media de la red (panel (A)), y el clustering (panel (B)). Para ambos casos, lo que se observa es un incremento monótono en la pérdida de información con el aumento de la distancia media y del clustering. Como se mencionó en líneas anteriores, el caso B produce una pérdida de información significativamente mayor que el caso A, lo cual se ve reflejado en más de un orden de magnitud de diferencia en la distancia $K - L$ para un mismo valor de distancia media o de clustering. A su vez, este gráfico parece reflejar algo bastante intuitivo, cuanto más tiempo estén circulando por la red los paquetes, más expuestos están a los errores de transmisión.

Por otro lado, tenemos interés en caracterizar el proceso de propagación de paquetes en sí, es decir, de contestarnos preguntas como ¿cuánto tiempo tardan los paquetes en llegar?, ¿cuántos pasos tienen que dar hasta llegar a destino?, ¿se forman colas de paquetes muy grandes en los nodos de la red, en cuales?, ¿en que instantes/ situaciones de la dinámica se producen mayormente la pérdida de información?, etc. En la figura 7.1, presentamos una serie de gráficos que apuntan a responder estas cuestiones. En el panel (A) se muestra la cantidad de paquetes que arriban a destino en función del tiempo, lo que se observa es una evolución monótona creciente verificando una rapidez de entrega mayor para las redes más desordenadas, esto coincide con el hecho de que el desorden reduce la distancia media de las redes y por lo tanto los paquetes tardan menos en llegar.

Otro parámetro importante que pone en evidencia el efecto de la topología, es la cantidad de pasos que un paquete tiene que dar desde su punto de partida hasta su destino, llamamos a esto “distancia de pasos” o simplemente “pasos”. En el panel (B) de la figura 7.1 se muestra la distribución de pasos en una realización de la dinámica. El gráfico muestra las claras diferencias entre redes con distinto grado de desorden, las redes más ordenadas presentan distribuciones mas aplastadas, verificando casos donde los paquetes tienen que “saltar” hasta mil veces el tamaño del sistema para llegar a destino. Por el contrario las redes mas desordenadas tienen una distribución más acotada con una media más definida, lo cual indica un comportamiento más homogéneo.

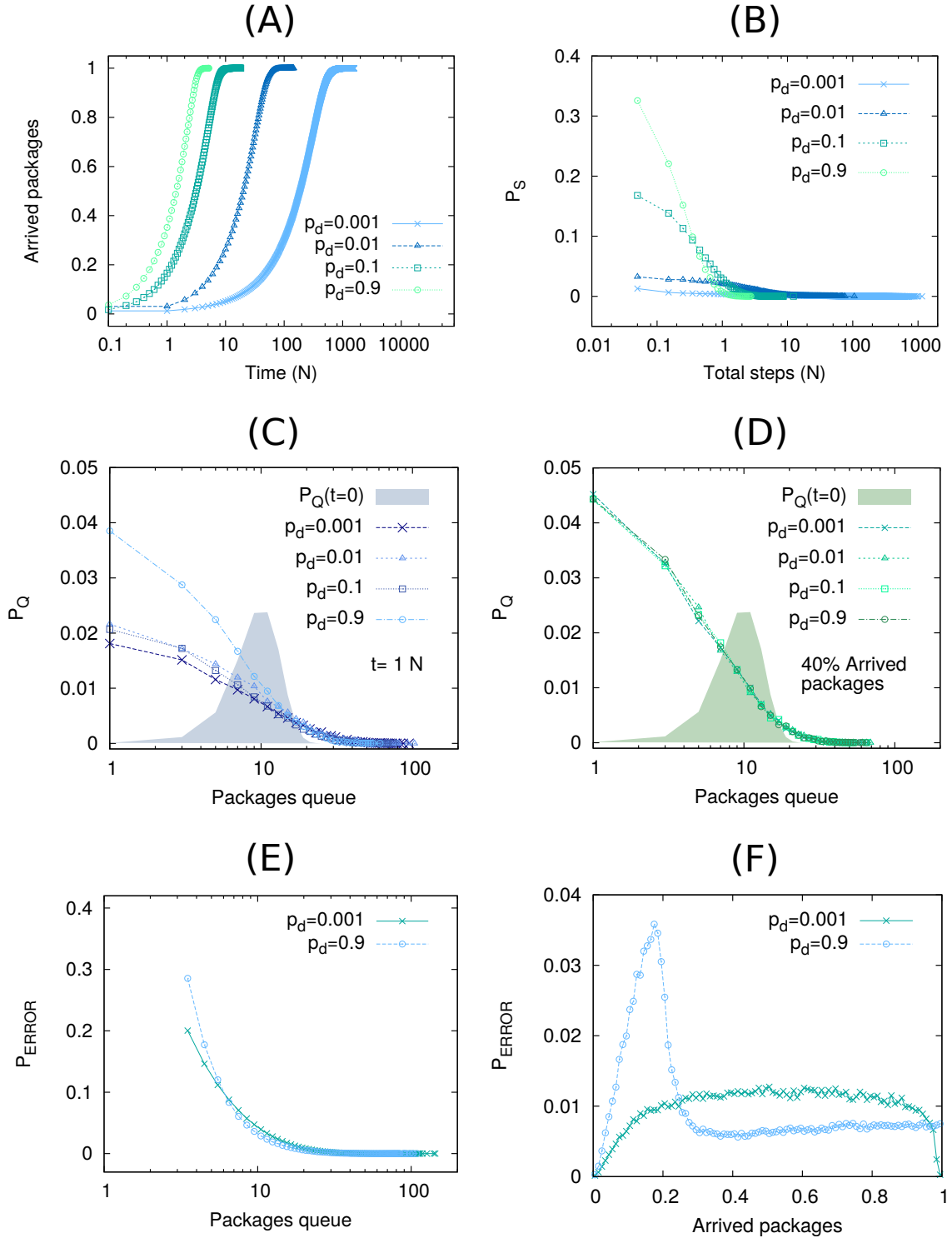


Figura 6.4: Caracterización de la dinámica para redes regulares tipo k – SWN con distinto grado de desorden. (A) Evolución temporal de la cantidad de paquetes entregados; (B) Distribuciones correspondientes a la distancia de pasos; (c) Distribución del tamaño de colas en los buffers a $t = N$; (D) Distribución del tamaño de colas en los buffers cuando el sistema a entregado el 40% de los paquetes; (E) Ocurrencia de error en función del tamaño de la cola de paquetes (para el caso B); (F) Ocurrencia de error en función de cantidad de paquetes entregados (para el caso B).

Por otro lado, el panel (C) de la figura 7.1 muestra la distribución de colas de paquetes en una realización de la dinámica a un tiempo dado ($t = N$) para redes con distinto grado de desorden. Se observa en este caso que la distribución inicial, se deforma reduciendo su media y alargando su cola, lo cual remite a un proceso de redistribución inicial de los paquetes, donde la topología de red hace que esta redistribución genere mayormente nodos con colas relativamente pequeñas y algunos pocos casos con colas relativamente largas.

Si analizamos la distribución de colas cuando redes de distinto grado de desorden están manejando la misma cantidad de paquetes, se obtiene el gráfico del panel (D) en la figura 7.1. Como puede verse la distribución de colas en este caso no depende del grado de desorden de la red, lo que podría indicar que, independientemente de los parámetros topológicos, el proceso difusivo lleva al sistema (en distintas escalas de tiempo) a manifestar las mismas configuraciones, al menos en lo que respecta a las colas de paquetes en los buffers.

Una pregunta que surge de estas observaciones es: ¿en que circunstancia se producen mayormente los errores?. Si nos centramos estrictamente en el caso B, que es el que mayor pérdida de información produce, la ocurrencia de error como función del tamaño de la cola de paquetes en los nodos, gráfico que se muestra en el panel (E) de la figura 7.1, pone en evidencia una clara correlación: es más frecuente la ocurrencia de errores en configuraciones de buffers donde las colas son relativamente pequeñas.

Esto parece ser algo antintuitivo, por que uno esperaría que en las colas largas haya una mayor posibilidad de encontrar dos mensajes iguales, y por lo tanto una mayor probabilidad de que se produzca un error. No obstante lo que se observa es todo lo contrario. En este caso, la explicación esta en que las configuraciones con colas relativamente pequeñas son mayoría, por lo tanto los errores se producen mayormente en esa circunstancia. Pero en otras topologías, como veremos más adelante en el texto, esto podría no ser tan evidente.

Asimismo, si se estudia la ocurrencia de errores como función de la cantidad de paquetes entregados, se observan claras diferencias entre redes ordenadas y desordenadas. El gráfico del panel (F) en la figura 7.1, muestra que en las redes más desordenadas la mayor ocurrencia de error sucede al comienzo de la dinámica, es decir cuando el sistema ha entregado apenas el 30 % de los paquetes, lo cual estaría indicando que se da en la etapa de redistribución inicial de los paquetes, hecho que parece contraponerse a lo que sucede en las redes más ordenadas, donde la ocurrencia del error no parece depender de la cantidad de paquetes que están circulando por la red, manifestando un comportamiento uniforme durante todo el transcurso de la dinámica.

En el párrafo siguiente, mostramos la pérdida de información producida por el caso B en un ejemplo en particular, en el cuál también se pone en evidencia la aparición de un fenómeno emergente.

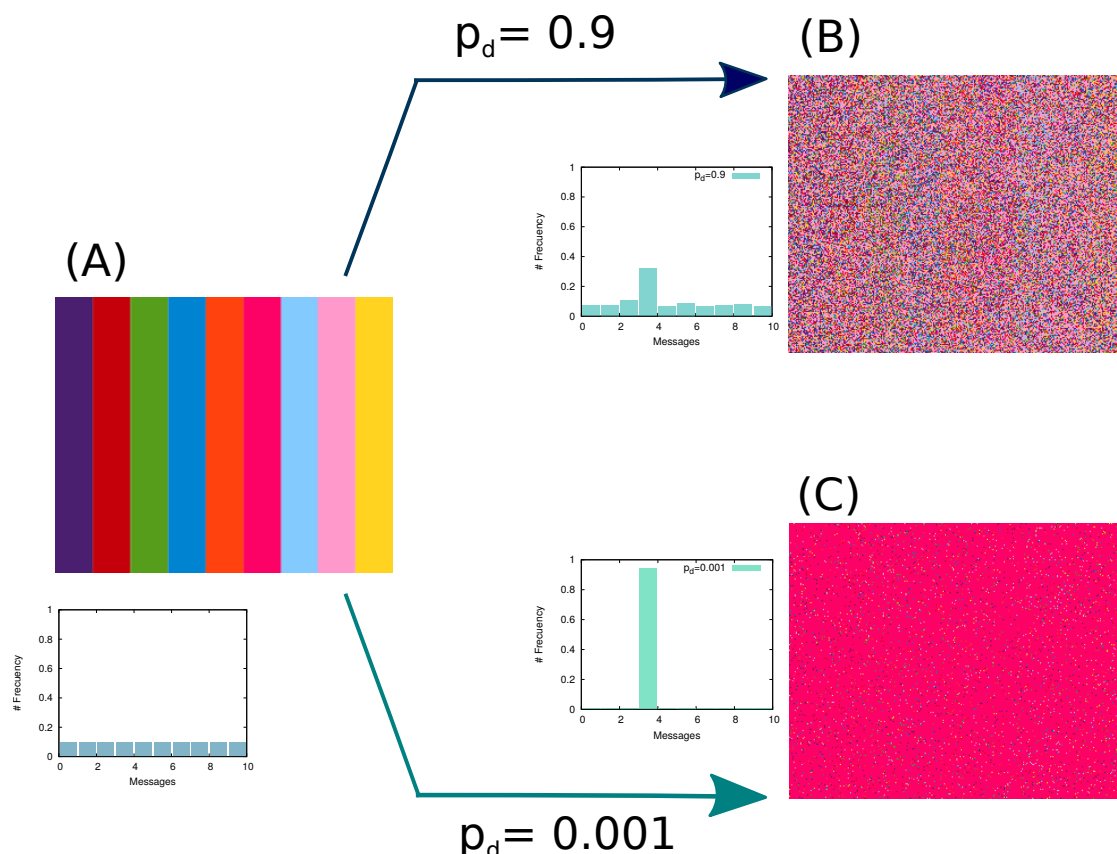


Figura 6.5: Ejemplo de pérdida de información como un fenómeno emergente en el caso de la transmisión de colores (caso B). (A) Distribución inicial de colores. (B) Distribución final de colores cuando la red es muy desordenada ($p_d = 0,9$). (C) Distribución final de colores en una red poco desordenada ($p_d = 0,001$). Las tres situaciones son complementadas con sus imágenes asociadas.

Fenómeno emergente en redes tipo k-SWN Supongamos que tenemos una imagen formada por diez franjas de distintos colores. La imagen esta formada por pequeñas unidades llamadas píxeles, donde cada píxel contiene la información de un color en particular. En el caso de nuestra imagen, si hacemos un histograma de colores, obtenemos una distribución uniforme entre los diez distintos tipos de colores. Imaginense ahora que tomamos esa información y la usamos en nuestra dinámica difusiva (caso B), ¿Cómo sería la imagen resultante luego del proceso? La respuesta se muestra en la figura 6.5. El panel (A) muestra la imagen inicial y el histograma asociado. Si el desorden en la red es alto, como en el caso $p_d = 0,9$ el resultado final, mostrado en el panel (B), es una pérdida de información parcial, la cual si bien es destructiva, conserva algunos rasgos originales de la imagen, nótese que no es difícil distinguir a simple vista la posición de algunas franjas de colores. Por el contrario, en el panel (C) se muestra lo que sucede cuando utilizamos una red ordenada ($p_d = 0,001$ en este caso), A simple vista se puede inferir que la pérdida de información es total, y no solo eso, además uno de los mensajes de la distribución emerge como un mensaje único, producto que resulta directamente del cambio en la topología de red. Cabe aclarar que varias realizaciones

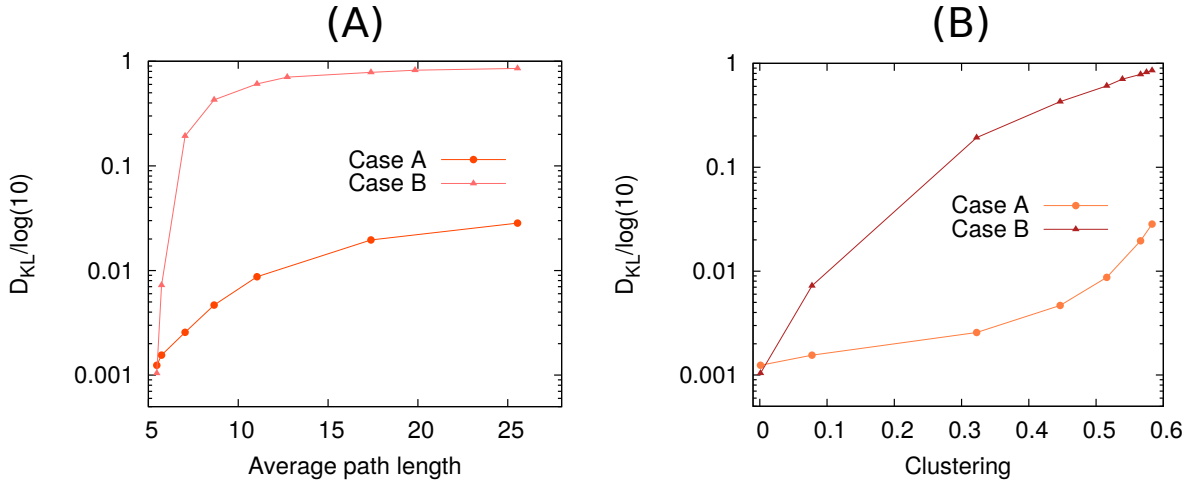


Figura 6.6: Distancia $K-L$ como función de (A) la distancia media de la red, (B) el coeficiente de clustering, Para las redes tipo small world. Para valores altos de estos parámetros, se observa que los errores de transmisión del caso B producen una pérdida de información significativamente mayor respecto al caso A. Para valores bajos se verifican valores similares.

de la dinámica arrojarían como resultado distintos mensajes que emergen como un mensaje único. En este caso vemos que el color rosa es el emergente, pero con igual probabilidad se observa el mismo efecto para otro colores.

En redes con esta topología, la dinámica produce pérdida de información de forma similar a lo que se sucede en redes regulares, en particular para el caso de redes desordenadas o, equitativamente, de distancia media chica. Esta observación queda manifiesta en el gráfico de la figura 6.6, donde en los paneles (A) y (B) se muestra respectivamente la distancia $K-L$ en función de la distancia media de la red y del clustering.

6.4.2. Redes tipo Small World

Para el caso B, en redes de distancia media y clustering alto, la pérdida de información alcanza niveles muy cercanos al máximo. No obstante para redes de poca distancia media y bajo coeficiente de clustering, la pérdida de información es mínima y comparable a lo que sucede para el caso A. Este efecto significativo que se observa, refuerzan lo visto en las redes regulares.

Al igual que en la sección anterior, caracterizamos los efectos de la topología de red en la dinámica. En la figura 6.7 panel (A), se muestra la evolución temporal de la entrega de paquetes para redes con diferentes grados de desorden, se observa un crecimiento monótono muy similar al de las redes regulares, verificando una velocidad de entrega mayor para las redes mas desordenadas. Con las distribuciones de pasos, que se muestran en el panel (B) de la figura 6.7, sucede algo similar, no se observan grandes cambios respecto a la redes regulares.

No obstante, las primeras diferencias aparecen al estudiar la distribución de colas, como puede observarse en los paneles (C) y (D) de la figura 6.7. Para ambos casos se

observan distribuciones aplastadas, verificándose mayormente colas muy pequeñas y nodos vacíos, y al mismo tiempo pocos casos de nodos con colas de tamaño ~ 10000 . Este hecho parecería indicar la existencia de un proceso de redistribución inicial de los paquetes, que lleva al sistema a la centralización de la información, sobre los nodos con topología tipo “hub”.

Analizando cuando ocurre el error, observamos que mayoritariamente en colas chicas, tal como muestra la figura 6.7 (E), aunque con diferencias significativas entre redes de distinto desorden, hecho no observado en el caso de las redes regulares. Asimismo, analizando la ocurrencia de error en función de la cantidad de paquetes entregados, (panel (F) de 6.7), y en particular para redes de alto desorden, observamos un comportamiento absolutamente contrario al de las redes regulares; en este caso se verifica una mayor ocurrencia de error en los instantes últimos de la dinámica, cuando han sido entregado más del 80 % de los paquetes.

En la sección siguiente exponemos los resultados obtenidos para las redes libres de escala, donde veremos que para esos casos, esta última tendencia de centralización se agudiza.

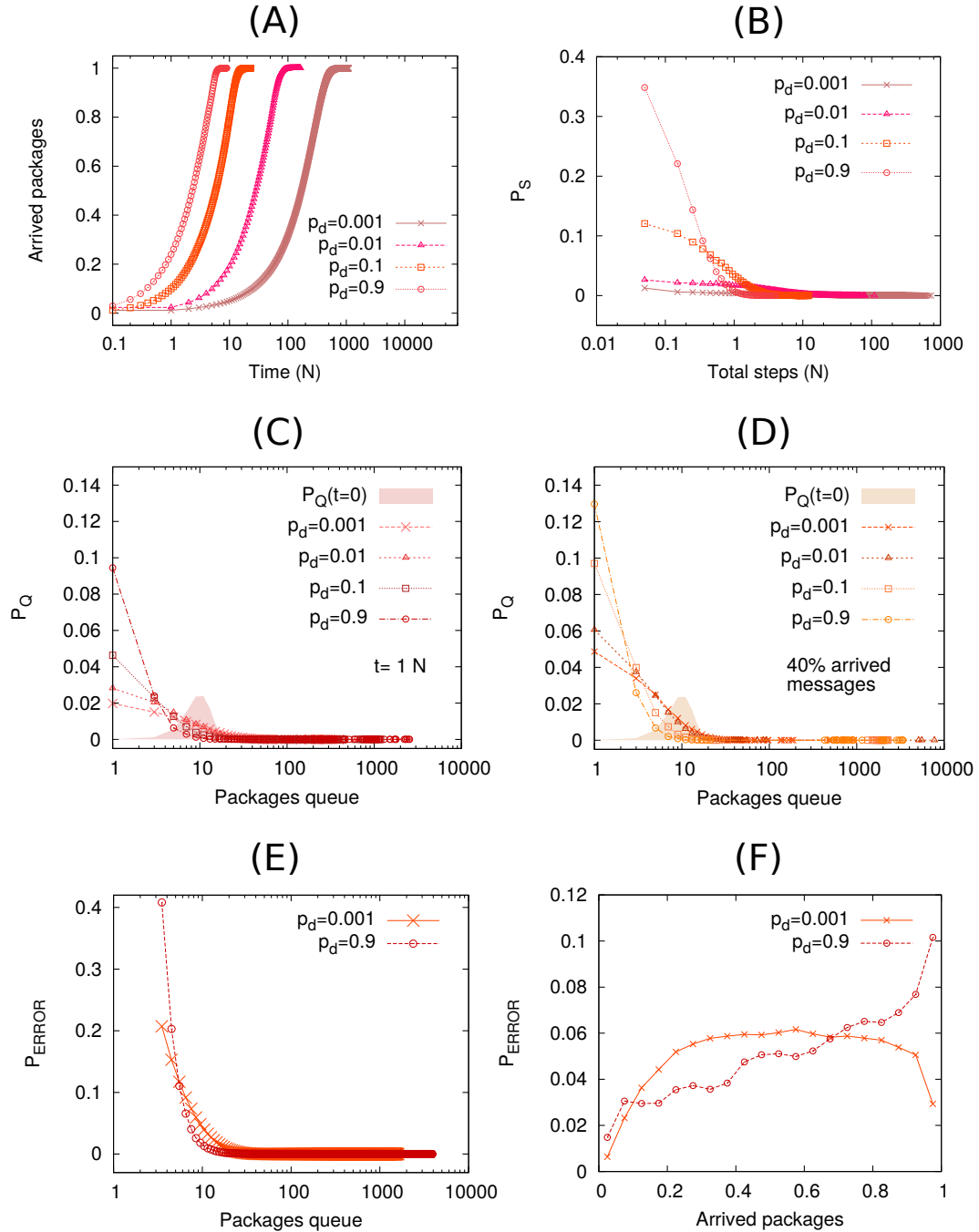


Figura 6.7: Caracterización de la dinámica para redes small world con distinto grado de desorden. (A) Evolución temporal de la cantidad de paquetes entregados; (B) Distribuciones correspondientes a la distancia de pasos; (c) Distribución del tamaño de colas en los buffers a $t = N$; (D) Distribución del tamaño de colas en los buffers cuando el sistema a entregado el 40 % de los paquetes; (E) Ocurrencia de error en función del tamaño de la cola de paquetes (para el caso B); (F) Ocurrencia de error en función de cantidad de paquetes entregados (para el caso B).

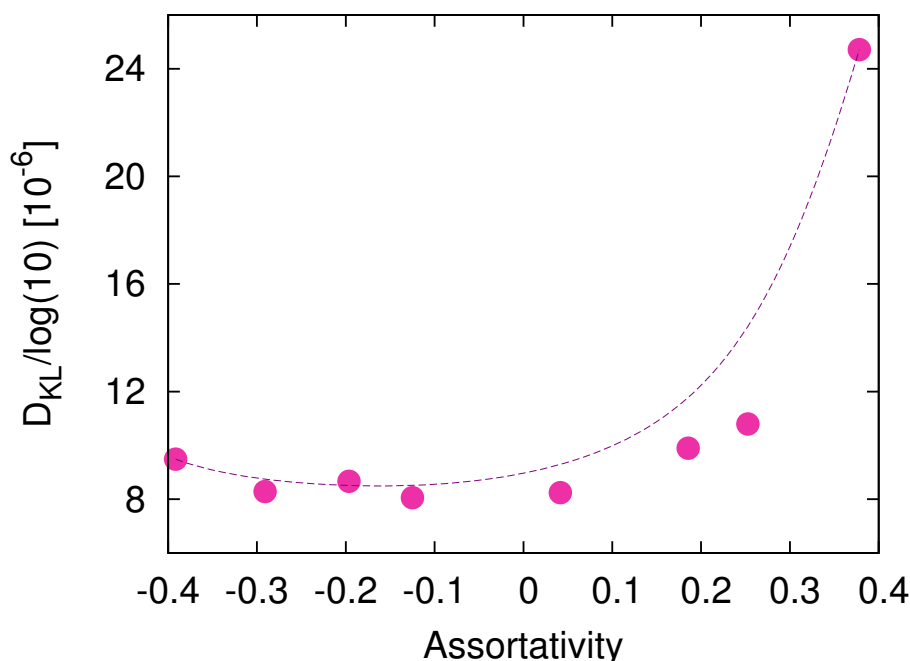


Figura 6.8: Distancia $K - L$ para redes con distintos valores de asortatividad. La pérdida de información tiene una tendencia a crecer para los valores extremos. La línea de puntos es un suavizado tipo “Bezier” de los datos solo para ayudar al ojo del lector.

6.4.3. Redes libres de escala

En esta sección resumimos los efectos más importantes de la topología libre de escala en el deterioro de la información producto de la dinámica de transmisión propuesta. Para realizar este análisis, nos centramos particularmente en los efectos de la asortatividad por grado, que como se explica en el capítulo 2 de metodologías, es un parámetro de control que nos permite estudiar redes libres de escala con diferente correlación de grado.

El gráfico de la figura 6.8 muestra la pérdida de información en función de la asortatividad. Los puntos son en promedio sobre 100 realizaciones por valor de asortatividad donde cada realización fue hecha sobre redes distintas. Lo que se observa es una clara tendencia de un incremento en la pérdida de información hacia valores extremos de asortatividad, hecho que se magnifica en el extremo positivo. No obstante en todos los casos la pérdida de información es muy chica en comparación a lo que sucede con los otros tipos de redes. Dicho de otra manera, el mayor valor de la distancia $K - L$ en las redes libres de escala, es aún más chico que el menor valor de distancia observado en las redes regulares y en las small world.

Al igual que los casos anteriores caracterizamos la dinámica a partir de varias observaciones. En la figura 6.9 panel (A) se muestra la evolución temporal de la entrega de paquetes. Lo que se observa es una evolución monótona para los casos desasortativo y neutro, verificando una velocidad de entrega mayor para el primero. En caso asortativo

($r = 0,4$), es por lo menos llamativo el quiebre de régimen que se verifica a $t \sim N$, hecho que parecería poner en evidencia un régimen de redistribución inicial de paquetes en el cual evoluciona a la par del caso desasortativo, y otro en el cual la entrega de paquetes se ralentiza.

Las distribuciones de pasos que se muestran en el panel (B) de 6.9, indican una dinámica rápida respecto a las topologías de red antes analizadas, aquí no se verifican casos en los que los paquetes hayan tenido que “saltar” grandes cantidades de veces hasta llegar a destino, hecho si observado en las otras topologías, lo cual podría deberse al bajo valor de coeficiente de clustering que muestran nuestras redes, en esta topología en particular.

Con respecto a las distribuciones de colas, lo que se observa, en los paneles (C) y (D) de 6.9, es una mayoría de casos de nodos vacíos o con muy pocos paquetes y a la vez casos donde las colas superan los 10000 paquetes (1 % del total), lo que indica el carácter centralizador que este tipo de topología produce en la dinámica. Es de notar que las redes desasortativas no son las que exhiben las colas de paquetes más largas, esto resulta particularmente interesante, ya que intuitivamente estas redes, las cuales como se dijo redundan en estructuras tipo hubs, deberían ser las más propensas a formar largas colas; no obstante se verifica todo lo contrario, las redes asortativas son las que manifiestan este comportamiento. Esto estaría indicando que las redes desasortativas son también las mejores “liberando” las colas de paquetes en los buffers, hecho que se pone en evidencia también en la rapidez que verifica el desarrollo de la dinámica en este tipo de topología.

En el panel (E) de la figura 6.9, se muestra la ocurrencia de error en función de la cola de paquetes, nuevamente al igual que en casos anteriores se observa una mayor probabilidad en colas pequeñas, tanto para redes asortativas como desasortativas. Asimismo se observa que para el caso asortativo, la distribución se extiende exhibiendo mas casos en el los extremos. El panel (F) de la misma figura muestra el error en función de la cantidad de paquetes en destino, en el caso de las redes asortativas, se verifica algo similar a lo que sucede con las redes small world desordenadas, donde la mayor ocurrencia de error se da al final en los instantes finales de la dinámica donde solo quedan en circulación el 20 % de los paquetes. Para el caso desasortativo se observa un comportamiento similar pero mucho menos significativo.

Por último, se estudió la relación existente entre los grados de los nodos y el largo de las colas de paquetes en los buffers de los nodos. La figura 6.10 muestra, para los casos asortativos y desasortativos, que en el instante final de la dinámica, cuando el 90 % de los paquetes ha llegado a destino, los nodos de grado alto acopian en sus buffers la mayor parte de los paquetes circulantes. Dicha relación se hace aún más extrema en el caso asortativo, donde vemos que la dinámica lleva a la centralización casi total de la información en un solo nodo (el más conectado) de la red.

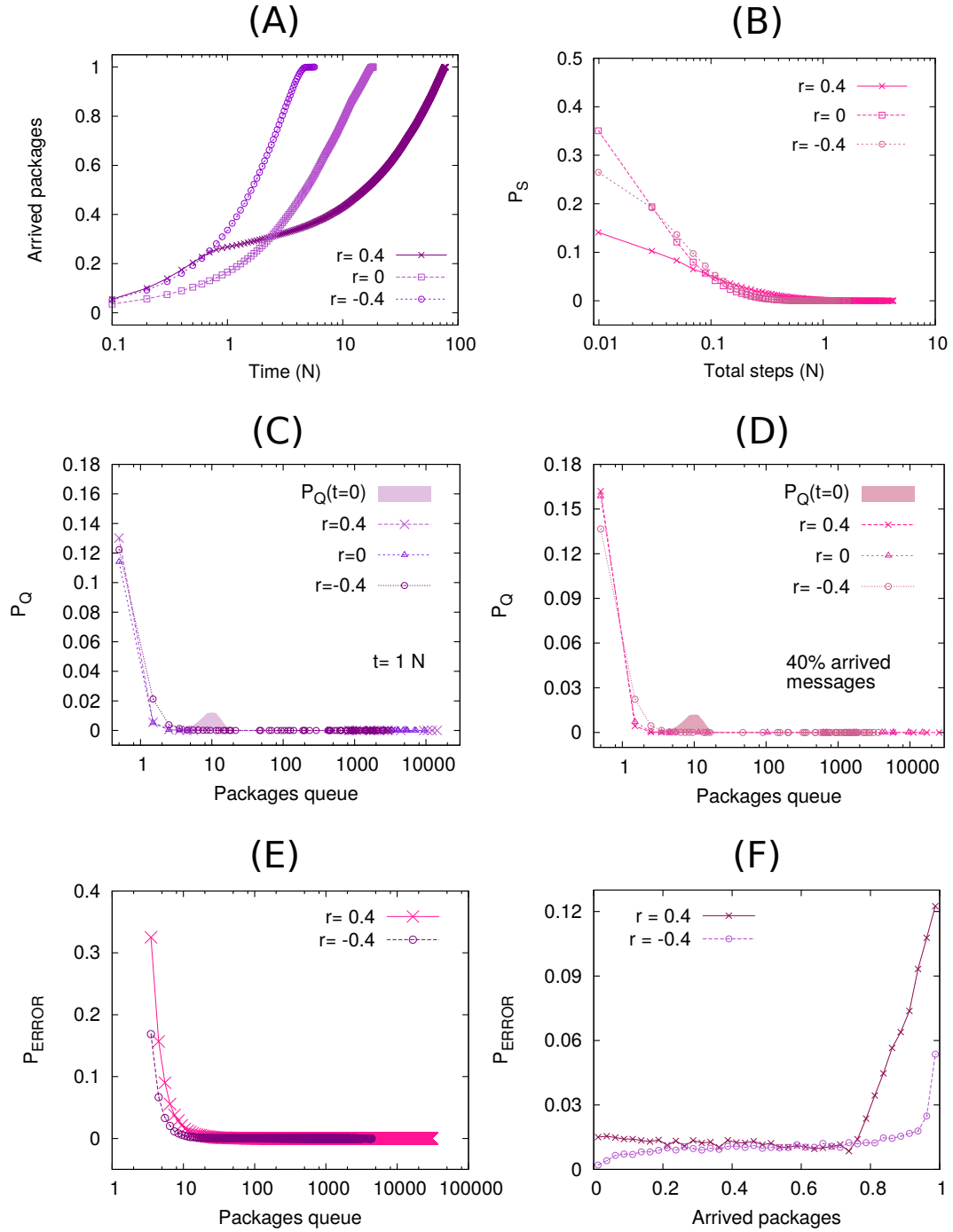


Figura 6.9: Caracterización de la dinámica para redes libres de escala con distinto grado de desorden. (A) Evolución temporal de la cantidad de paquetes entregados; (B) Distribuciones correspondientes a la distancia de pasos; (c) Distribución del tamaño de colas en los buffers a $t = N$; (D) Distribución del tamaño de colas en los buffers cuando el sistema a entregado el 40 % de los paquetes; (E) Ocurrencia de error en función del tamaño de la cola de paquetes (para el caso B); (F) Ocurrencia de error en función de cantidad de paquetes entregados (para el caso B).

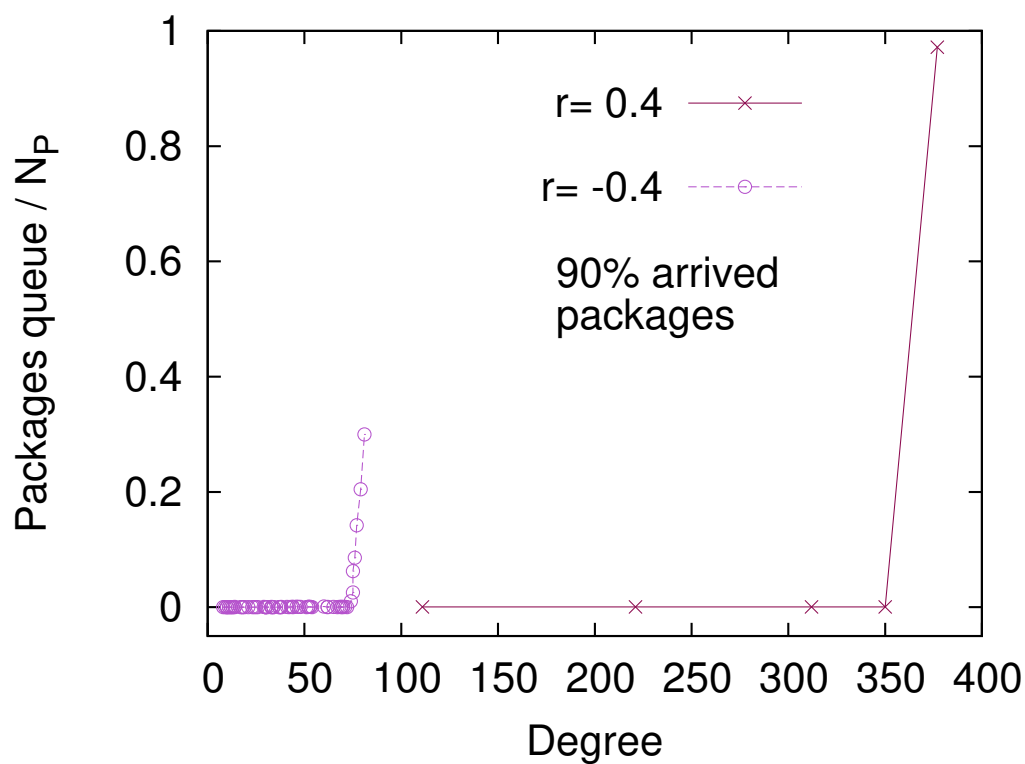


Figura 6.10: Relación entre el grado de los nodos y las colas de paquetes en los buffers en los instantes finales de la dinámica para los casos asortativo y desasortativo. Se observa un proceso de centralización de la información en los nodos más conectados. Nota: Para realizar el gráfico no se tuvieron en cuenta los nodos con buffers vacíos.

6.5. Conclusiones

En este trabajo propusimos estudiar los efectos de la topología de red en un sistema de transmisión de información basado en una dinámica difusiva cuando esta presenta alguna probabilidad de falla o de error, modelados como los casos A y B.

Independientemente del caso, se observó un efecto directo de la topología de red en la degradación o pérdida de información del sistema, la cual vimos asociada a las diferencias devenidas del proceso difusivo producto de los diferentes parámetros topológicos utilizados y analizados.

Las redes más perjudiciales para la transmisión de información, bajo el mecanismo propuesto, fueron las redes regulares. Para estos casos observamos una importante pérdida de información cuando las redes presentan una distancia media grande y un alto coeficiente de clustering (poco desorden). En estos casos la maximización del error parecería estar correlacionado con el hecho de que en el proceso difusivo los paquetes tienden a circular más tiempo por la red (lo cual se ve claramente si se analizan las distribuciones de pasos) quedando más propensos a la ocurrencia de error. Algo parecido también se observa en las redes tipo small world.

Tal vez lo más interesante que observamos estudiando la dinámica en las redes regulares, fue la aparición de un fenómeno emergente para el caso B, en donde verificamos la pérdida de información total del sistema y la aparición de un mensaje único, producto de la combinación del proceso difusivo con esa topología de red determinada. Además, note que este fenómeno resulta particularmente interesante desde el punto de vista del modelado de la formación de consenso, un tema de mucho interés en el estudio de los sistemas sociales.

Por otro lado, al estudiar la distribución de colas de paquetes en los buffers, observamos que cuando el sistema esta manejando una cantidad de paquetes determinada, las distribuciones se muestran equivalentes, independientemente del grado de desorden en la red. Esto estaría indicando que si bien el proceso difusivo tiene distintos tiempos característicos para redes más o menos desordenadas, este lleva al sistema siempre a alcanzar la misma configuración final. Cabe remarcar que esto no se observa en las redes tipo small world, lo cual da indicios de que el fenómeno podría tener alguna relación con las distribución de grado. Un estudio más profundo del tema queda planteado para futuras investigaciones.

El análisis sobre la implementación de la dinámica en redes tipo libre de escala arrojó varias observaciones interesantes, en principio la pérdida de información tanto en el caso A como en el B es mínima comparada con las otras topologías, en función de la asortatividad observamos que hay una tendencia a perder información cuando las redes presentan correlación de grado, tanto desasortativas como asortativas verificándose un incremento mayor en este último caso.

En términos generales, las redes neutras son las que menos información pierden respecto a la totalidad de las redes analizadas en este trabajo, no obstante, no son las más rápidas, las redes desasortativas, siempre asociadas a redes tecnológicas, verifican esta última propiedad pero sin mostrar una diferencia muy amplia respecto a las redes regulares y small world en sus versiones altamente desordenadas. Sería interesante también complementar este análisis estudiando la dinámica en otros tipos de redes, como por ejemplo en redes aleatorias (tipo Erdős - Rényi [28]), dejamos planteada esta idea para un posible estudio a futuro.

Con respecto a la ocurrencia de error, en los tres tipos de redes analizadas se observó que las topologías que tienden a generar colas pequeñas de paquetes (~ 10 paquetes), multiplican las fuentes de error y por lo tanto tienden a una mayor pérdida de información, hecho que se verifica principalmente en las redes regulares, pero que también queda de manifiesto en las redes libres de escala, ya que estas presentan la menor pérdida de información y a la vez son las que generan las colas de paquetes más largas, hecho que redundaría en una disminución de las colas pequeñas, y por lo tanto en una disminución de las fuentes de error.

Asimismo las distintas topologías manifiestan su pico máximo de pérdida de información en distintos instantes del proceso difusivo, las redes regulares desordenadas lo hacen al principio de la dinámica, en cambio las redes ordenadas lo hacen de una manera aproximadamente uniforme durante todo el proceso. Las redes tipos small world desordenadas pierden información mayormente en los instantes finales de la dinámica, y las ordenadas, al igual que en el caso de las redes regulares, lo hacen uniformemente durante todo el proceso. Por otro lado, las redes libres de escala, al igual que el caso anterior, manifiestan un pico en la pérdida de información al final de la dinámica, amplificándose el fenómeno en las redes asortativas. Una explicación de esta observación estaría nuevamente en las fuentes de error, el proceso difusivo produce una redistribución de los paquetes llevando a las diferentes topologías a manifestar en algunos casos colas de paquetes más o menos largas que otros, es decir generando más o menos fuentes de error, en distintas instancias del proceso.

Para finalizar, cabe mencionar que dadas estas últimas observaciones que parecen indicar un mayor beneficio (menor pérdida de información) para los sistemas que tienden a centralizar la información, ha generado nuevas inquietudes hacia donde dirigir una investigación a futuro, ¿puede esta centralización ser perjudicial para el sistema? la respuesta es afirmativa si consideramos una dinámica con agentes interesados en manipular esta información y usarla para su beneficio en detrimento de la mayoría, por lo tanto esto se convierte en un tema de mucho interés y una manera complementaria de estudiar los efectos de la intervención humana desde el punto de vista del comportamiento. En este mismo sentido es interesante indagar acerca de la robustez [29] de la red, ¿qué sucedería si extraigo los nodos que centralizan la información? ¿cambiaría eso

la dinámica? ¿cómo?, estas preguntas resultan muy interesantes y marcan un posible camino hacia donde guiar futuras investigaciones.

Bibliografía

- [1] Boccaletti, S., Latora, V., Moreno, Y., Chavez, M., & Hwang, D. U. (2006). Complex networks: Structure and dynamics. *Physics reports*, 424(4), 175-308. [89](#)
- [2] Czaplicka, A., Holyst, J. A., & Sloot, P. M. (2013). Noise enhances information transfer in hierarchical networks. *Scientific reports*, 3, 1223. [90](#)
- [3] Kuperman, M., & Abramson, G. (2001). Small world effect in an epidemiological model. *Physical Review Letters*, 86(13), 2909. [89](#)
- [4] Abramson, G., & Kuperman, M. (2001). Social games in a social network. *Physical Review E*, 63(3), 030901.
- [5] Kuperman, M. N. (2006). Cultural propagation on social networks. *Physical Review E*, 73(4), 046139. [89](#)
- [6] Jackson, M. O., & Rogers, B. W. (2007). Relating network structure to diffusion properties through stochastic dominance. *The BE Journal of Theoretical Economics*, 7(1), 1-13. [89](#)
- [7] López-Pintado, D. (2008). Diffusion in complex social networks. *Games and Economic Behavior*, 62(2), 573-590.
- [8] Gómez-Gardeñes, J., & Latora, V. (2008). Entropy rate of diffusion processes on complex networks. *Physical Review E*, 78(6), 065102. [89](#)
- [9] Traud, A. L., Mucha, P. J., & Porter, M. A. (2012). Social structure of Facebook networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 391(16), 4165-4180. [89](#)
- [10] Jalili, M. (2013). Social power and opinion formation in complex networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 392(4), 959-966.
- [11] Kwak, H., Lee, C., Park, H., & Moon, S. (2010, April). What is Twitter, a social network or a news media?. In *Proceedings of the 19th international conference on World wide web* (pp. 591-600). ACM. [89](#)

- [12] Ganesh, A., Massoulié, L., & Towsley, D. (2005, March). The effect of network topology on the spread of epidemics. In INFOCOM 2005. 24th Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies. Proceedings IEEE (Vol. 2, pp. 1455-1466). IEEE.
- [13] Huang, L., Park, K., & Lai, Y. C. (2006). Information propagation on modular networks. *Physical Review E*, 73(3), 035103. [90](#)
- [14] Noh, J. D., & Rieger, H. (2004). Random walks on complex networks. *Physical review letters*, 92(11), 118701.
- [15] Adamic, L. A., Lukose, R. M., Puniyani, A. R., & Huberman, B. A. (2001). Search in power-law networks. *Physical review E*, 64(4), 046135.
- [16] Kim, B. J., Yoon, C. N., Han, S. K., & Jeong, H. (2002). Path finding strategies in scale-free networks. *Physical Review E*, 65(2), 027103.
- [17] Bailey, N. T. (1975). *The mathematical theory of infectious diseases and its applications*. Charles Griffin & Company Ltd, 5a Crendon Street, High Wycombe, Bucks HP13 6LE..
- [18] Rogers Everett, M. (1995). *Diffusion of innovations*. New York, 12.
- [19] Liben-Nowell, D., & Kleinberg, J. (2008). Tracing information flow on a global scale using Internet chain-letter data. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 105(12), 4633-4638.
- [20] Yook, S. H., Radicchi, F., & Meyer-Ortmanns, H. (2005). Self-similar scale-free networks and disassortativity. *Physical Review E*, 72(4), 045105.
- [21] Watts, D. J., & Strogatz, S. H. (1998). Collective dynamics of “small-world” networks. *nature*, 393(6684), 440-442.
- [22] Kuperman, M. N., & Risau-Gusman, S. (2008). The effect of the topology on the spatial ultimatum game. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 62(2), 233-238.
- [23] Barabási, A. L., & Albert, R. (1999). Emergence of scaling in random networks. *science*, 286(5439), 509-512.
- [24] Xulvi-Brunet, R., & Sokolov, I. M. (2004). Reshuffling scale-free networks: From random to assortative. *Physical Review E*, 70(6), 066102.
- [25] Samukhin, A. N., Dorogovtsev, S. N., & Mendes, J. F. F. (2008). Laplacian spectra of, and random walks on, complex networks: Are scale-free architectures really important?. *Physical Review E*, 77(3), 036115.

-
- [26] Czaplicka, A., Holyst, J. A., & Sloot, P. M. (2013). Noise enhances information transfer in hierarchical networks. *Scientific reports*, 3, 1223.
- [27] Kullback, S., & Leibler, R. A. (1951). On information and sufficiency. *The annals of mathematical statistics*, 22(1), 79-86. [93](#)
- [28] Erdős, P., & Rényi, A. (1959). On random graphs, I. *Publicationes Mathematicae (Debrecen)*, 6, 290-297. [108](#)
- [29] Callaway, D. S., Newman, M. E., Strogatz, S. H., & Watts, D. J. (2000). Network robustness and fragility: Percolation on random graphs. *Physical review letters*, 85(25), 5468. [108](#)

Capítulo 7

Tránsito vehicular: Fenómeno crítico inducido por un semáforo

Más de la mitad de la población mundial vive en áreas urbanas. La logística necesaria para movilizar a todas estas personas para que desarrollen sus actividades diarias, es un problema de mucho interés ya que impacta directamente sobre sus vidas [1, 2].

Los sistemas de transporte urbano actualmente presentan muchos problemas [3]: Grandes congestiones en el tránsito, problemas ambientales causados por la contaminación, estrés general en la población, pérdidas de tiempo y en consecuencia de dinero [4, 5].

En la actualidad, la mayoría de las ciudades (algunas más que otras) cuentan con infraestructura para minimizar los efectos adversos del tránsito. Lo cierto es que es difícil coordinar y sincronizar el uso de estos recursos de manera óptima y mejorar el bienestar global [6, 7]. En general la organización de estos recursos ocurre en varios subsistemas aislados sin conexión ni retroalimentación entre ellos.

Muchas veces las estrategias gubernamentales, para reducir los problemas asociados a la logística de transporte, tienden a incrementar la infraestructura, por ejemplo construyendo más autopistas, lo cual no siempre funciona [8]. Asimismo, no siempre se cuenta con los recursos económicos para hacerlo y si se los tuviese cabría preguntarse ¿no sería más inteligente y barato optimizar el uso de la infraestructura que ya se encuentra a disposición? [9].

Una de las herramientas disponibles, que tienen la mayoría de las ciudades, para optimizar el flujo vehicular son las señales de control de tráfico o semáforos. Muchos tecnólogos han tomado nota de la relevancia de la optimización de estos sistemas y encarado el diseño y la construcción de artefactos más autónomos e inteligentes [10–16].

El funcionamiento de un semáforo queda determinado por los lapsos de luz verde y luz roja. El efecto que tienen los tiempos característicos, asociados al ciclo del

semáforos (rojo - amarillo - verde), en el fluir del tránsito es un fenómeno altamente no trivial. Si el sistema está cerca del congestionamiento se vuelve muy inestable [17–20] y cualquier perturbación, como ser el accionar del semáforo, puede llevar al sistema a un congestionamiento total. En base a esto, la idea de este trabajo es caracterizar las consecuencias del accionar del semáforo sobre el fluir del tránsito, y en particular estudiar los efectos de los tiempos de su ciclo. Para ello se realizó un modelo computacional de tránsito, basado en autómatas celulares [21–25], al cual se le incorporó un semáforo y se estudió el efecto de su accionar en el sistema.

7.1. El modelo

Para simular nuestro sistema de tránsito se usó como base el modelo de Nagel - Paczuski [23]. En este modelo, la representación del tránsito vehicular a lo largo de una calle y en un solo sentido se realiza por medio de una red unidimensional de L sitios. Los autos se mueven por esta red a intervalos de tiempos discretos, y lo hacen en un rango de velocidades enteras entre 0 y v_{max} .

Cada auto ocupa un solo sitio de la red, los cuales en cada paso temporal pueden estar ocupados o vacíos. Para decidir la velocidad, es decir el número de celdas que avanzará en un paso temporal, cada auto evalúa la velocidad v a la que se estaba desplazando en el caso anterior y la distancia (en cantidad de sitios) que lo separa del auto inmediatamente siguiente (*gap*), basándose en las siguientes reglas:

- Se dice que un auto está en estado estacionario cuando está viajando a v_{max} . En ese caso, si $gap \geq v_{max}$, entonces simplemente mantiene su velocidad.
- Si un vehículo no está en estado estacionario se dice que está trabado. En ese caso puede cambiar o mantener su velocidad de acuerdo a las siguientes reglas:
 - Aceleración: Si se cumple que $gap \geq v + 1$, el auto mantiene su velocidad $v \rightarrow v$ con probabilidad p , y con probabilidad complementaria, acelera $v \rightarrow v + 1$.
 - Desaceleración: Si se cumple que $gap \leq v - 1$, el auto desacelera con actitud preventiva, $v \rightarrow \max[gap - 1, 0]$, con probabilidad q . Y con probabilidad complementaria desacelera como $v \rightarrow gap$.
- Una vez decidida la velocidad, cada auto avanza v sitios, donde v es su nueva velocidad.

Es de notar que en [23] $p = q = 1/2$. En nuestro caso dejamos abierta la posibilidad de variar esos parámetros, ya que como el lector puede inferir, se trata de parámetros

que representan el comportamiento individual de los conductores. Por un lado q puede asociarse a la probabilidad de mantener una velocidad prudente. Y por el otro lado, p puede interpretarse como la probabilidad de mantener una distancia prudencial.

Se plantearon para este sistema condiciones de contorno abiertas. Los autos entran por la izquierda y salen por la derecha. Los autos que ingresan lo hacen con $v = 0$, y su tasa de ingreso está caracterizada por una probabilidad α , de manera tal que si $\alpha = 0$ ningún auto ingresa a la calle, y si $\alpha = 1$ los autos siempre (que haya lugar) ingresan. Los que salen lo hacen como si delante de ellos tuvieran una vía totalmente libre.

El comportamiento del semáforo se modeló considerando dos luces control, la luz verde y la luz roja. Como es usual la luz roja indica “detención” y la verde “adelante”. Fue colocado a una distancia X de la entrada de autos. Funcionaba con un ciclo de período $\tau = t_R + t_V$, donde t_R y t_V son los lapsos con luz roja y verde, respectivamente, y cumplen que

$$t_R = \gamma\tau, \quad t_V = (1 - \gamma)\tau \quad (7.1)$$

Siendo γ la fracción del tiempo τ donde el semáforo prendía la luz roja.

La figura 7.1 muestra el fluir del tránsito en el plano (x, t) . Aquí se representa la posición de cada auto en la calle a medida que avanza el tiempo. El color de cada sitio en el gráfico representa la velocidad del auto que lo ocupa (la escala se indica en la figura). En este caso $p = q = 1/2$, $\tau = 200$, $\alpha = 1$, $L = 1000$ y $X = 500$.

El panel (A) de 7.1, muestra la evolución del tránsito sin el accionar del semáforo. Los autos ingresan a la calle con $v = 0$, aceleran hasta alcanzar su velocidad máxima (estado estacionario) y atraviesan la calle sin sobresaltos. En el plano (x, t) , cuando el tráfico está en estado estacionario, realiza una trayectoria sobre una diagonal de pendiente característica $1/v_{max}$. En estas condiciones se dice que el sistema está en flujo libre.

Los paneles (B) y (C) muestran el funcionamiento del semáforo con un tiempo de rojo pequeño ($\gamma = 0,1$ y $\gamma = 0,12$). Se observa que los autos frenan en X , y se forman pequeñas filas producto de la espera que induce el semáforo, produciendo en el sistema una congestión parcial.

El efecto del semáforo en (D) es mucho más abrupto. Con $\gamma = 0,14$, es decir con solo el 14 % del ciclo del semáforo en rojo, el sistema cae en un congestionamiento total. Aparece lo que se conoce como ondas de Nagel [21], este fenómeno describe una onda de choque que avanza hacia atrás, según el sentido del tránsito, y que se produce a medida que los autos van entrando en el estado congestionado, se dice entonces que a través de esta onda se propaga el congestionamiento. En este estado, se producen largas filas y largas esperas. Algunos autos deben esperar más de un ciclo para atravesar el semáforo. Se hace evidente entonces, que la perturbación producida por éste tiene un impacto

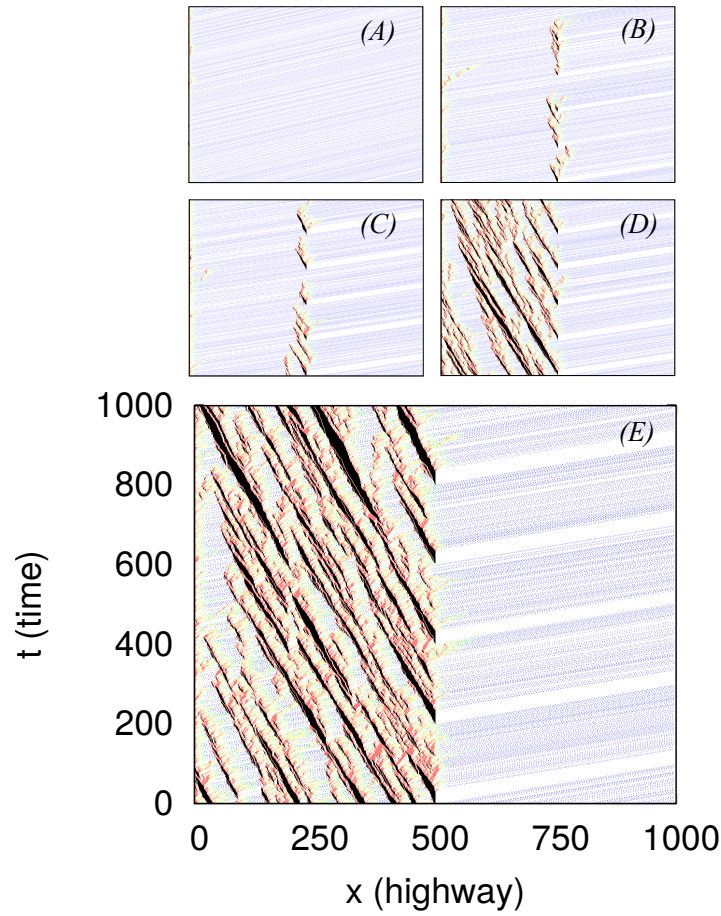


Figura 7.1: Plano x-t para el estado del tránsito con diferentes valores de γ para el semáforo. (A): Sin semáforo, flujo libre. (B) y (C): $\gamma = 0,1$ y $\gamma = 0,12$ respectivamente, el tiempo de rojo para estos valores no provoca grandes congestiones en el tránsito, solo pequeñas filas de autos detras del semáforo cuando este está en rojo. (D) y (E): $\gamma = 0,14$ y $\gamma = 0,16$ respectivamente, para estos valores el tránsito ya está en estado congestionado. La escala de colores representa la velocidad de los autos, azul: velocidad máxima $v=5$; verde: $v=4$; amarillo: $v=3$; anaranjado: $v=2$; rojo: $v=1$; negro: auto parado $v=0$; blanco: sitio vacío.

directo en el flujo de los autos. En la siguiente sección se presentan los resultados del estudio de este impacto.

7.2. Resultados

En esta sección se presentan los resultados obtenidos en las simulaciones numéricas del modelo de tránsito descrito en la sección anterior.

Se realizó un estudio del estado del tránsito para diferentes tiempos de rojo en el ciclo del semáforo. Para ello se hizo un barrido en valores de γ midiendo en cada caso la densidad de autos ρ en la calle, desde la entrada hasta la posición del semáforo (X). Para medir la densidad se procedió de la siguiente manera: En una etapa inicial se dejaba evolucionar el semáforo por un tiempo de diez ciclos τ , ya que por inspección se comprobó que este tiempo es suficiente para eliminar cualquier tipo de dependencia

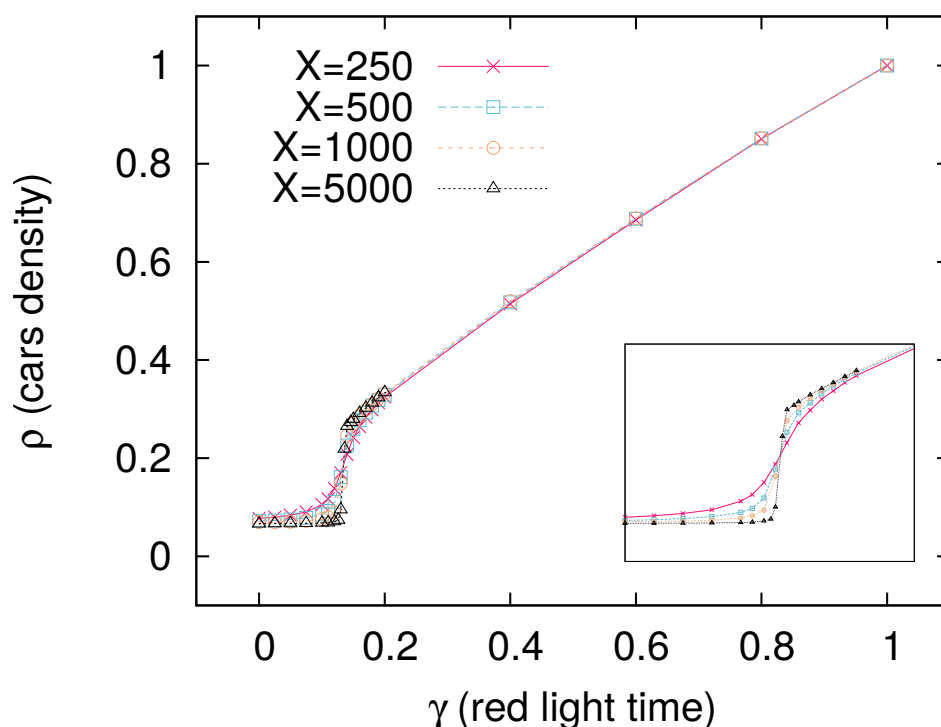


Figura 7.2: Relación entre la densidad media de autos ρ , medida desde la entrada hasta la posición del semáforo, y el porcentaje del ciclo del semáforo en rojo γ . Las distintas curvas fueron realizadas para distintas posiciones del semáforo en la calle X . Los parámetros fijos en estos casos fueron $\tau = 200$, $p = q = 1/2$ y $\alpha = 1$. El largo total de la calle L , fue elegido como $L = X + 200$, dejando una distancia arbitraria detrás de la posición del semáforo para que los autos evolucionen libremente hacia la salida.

de las condiciones iniciales.

Luego para cada paso de tiempo y por diez ciclos más, se midió la densidad de la calle definida como la cantidad de autos dividido la cantidad de sitios, y se obtuvo el promedio temporal. De esta manera se obtuvieron las relaciones entre ρ y γ que se muestran en la figura 7.2. Cada una de ellas fue realizada para distintas distancias entre la entrada y el semáforo, es decir para distintos valores de X .

Lo que se observa es una evolución aproximadamente constante de la densidad para valores bajos de γ , lo cual indica un estado de flujo libre en el tránsito. Para valores cercanos a $\gamma = 0,13$, la densidad da un salto abrupto, lo cual indica una transición de fase de estados de flujo libre a flujo congestionado. Para un sistema infinito, en esa zona, se esperaría la aparición de una discontinuidad. Por lo tanto, considerando a ρ como al parámetro de orden del sistema y a γ como al parámetro de control, este salto evoca una transición de primer orden [26]. A partir de ese punto la densidad evoluciona en forma lineal, como un promedio entre la densidad para estados de flujo libre y la densidad máxima, hasta llegar al congestionamiento total.

Por otro lado, el ancho de las curvas en el rango donde se produce la transición decrece a medida que crece X , lo cual hace conjeturar la existencia de una función

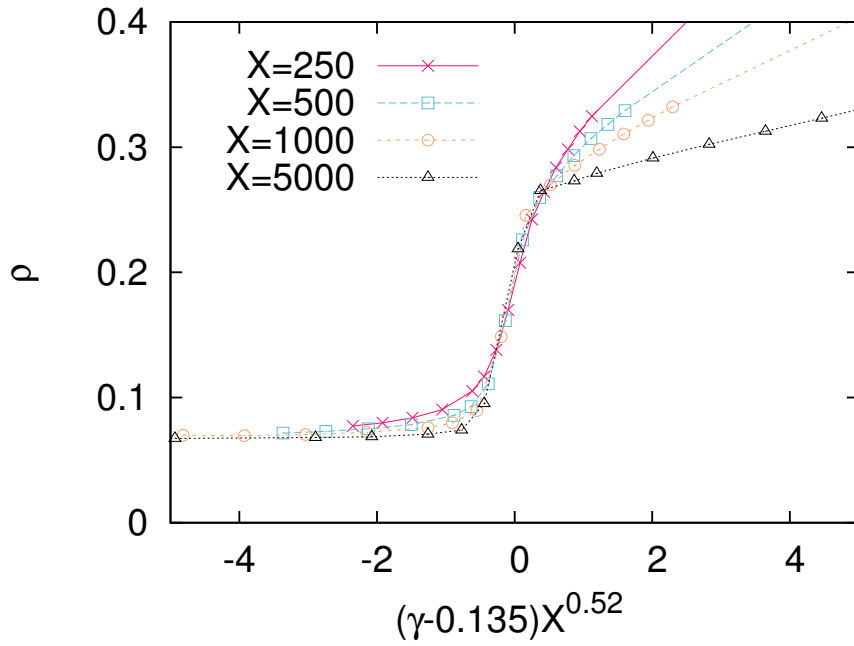


Figura 7.3: Colapso de las curvas de la figura 7.2, para valores alrededor de la transición, en una función universal $\rho = \Phi((\gamma - \gamma_C)X^{\xi_C})$ expresada en términos de los parámetros críticos γ_C y ξ_C , y del tamaño de la calle X .

$\Phi(u)$ tal que $\rho = \Phi((\gamma - \gamma_C)X^{\xi_C})$, que describe un comportamiento universal en la zona de la transición. Nuestras mejores estimaciones de los parámetros críticos son $\gamma_C = 0,135$ y $\xi_C = 0,52$. El colapso de las curvas se muestran en la figura 7.3.

Se estudió también el efecto del flujo de autos en la entrada de la calle. Para esto, se realizaron simulaciones de las mismas características que las descritas arriba, esta vez fijando $X = 500$ y variando el probabilidad de entrada α . En la figura 7.4 se muestran los resultados. Se observa un corrimiento de la transición hacia valores altos de γ con la disminución del flujo de entrada. Lo cual pone en evidencia la relación entre la cantidad de autos circulando y los tiempos de rojo necesarios para no hacer colapsar el sistema a flujo congestionado. Para echar luz sobre esto último, se estimó para cada curva con un α distinto el γ_C , es decir el tiempo de rojo correspondiente al cual el sistema cambia de fase. Con esto se realizó el diagrama de fases que se muestra en la figura 7.5.

Por último se estudió el efecto de diferentes combinaciones de valores de los parámetros q y p . Como ya se dijo, esto permite estudiar el efecto macroscópico que diferentes patrones de comportamiento individual producen en el sistema de tránsito. En la figura 7.6 se muestra la evolución de ρ en función de γ para el sistema determinista, es decir cuando $p = q = 0$. En esta situación los conductores se ven obligados a comportarse siempre de la misma manera. En otras palabras el ruido asociado al comportamiento individual desaparece. En este caso la transición hacia estados de tránsito congestionados se corre hacia $\gamma \sim 0,4$ y ocurre no como una transición inducida por fluctuaciones

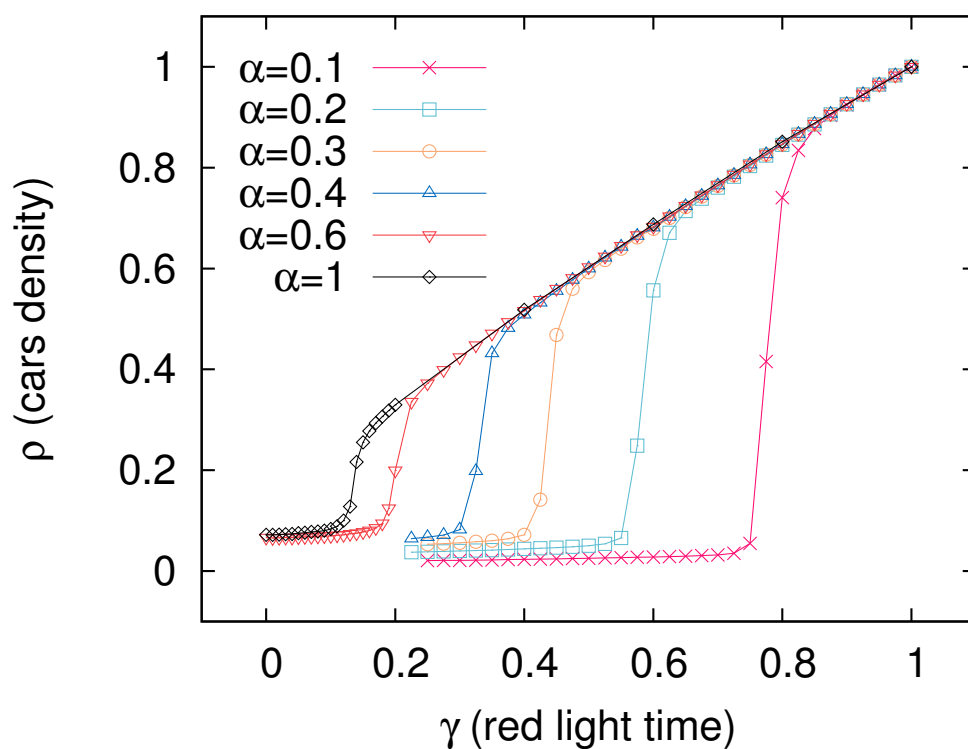


Figura 7.4: Relación ρ vs. γ para distintos valores de la probabilidad de ingreso de autos a la calle α . Los parámetros fijos en estos casos fueron $\tau = 200$, $p = q = 1/2$ y $X = 500$.

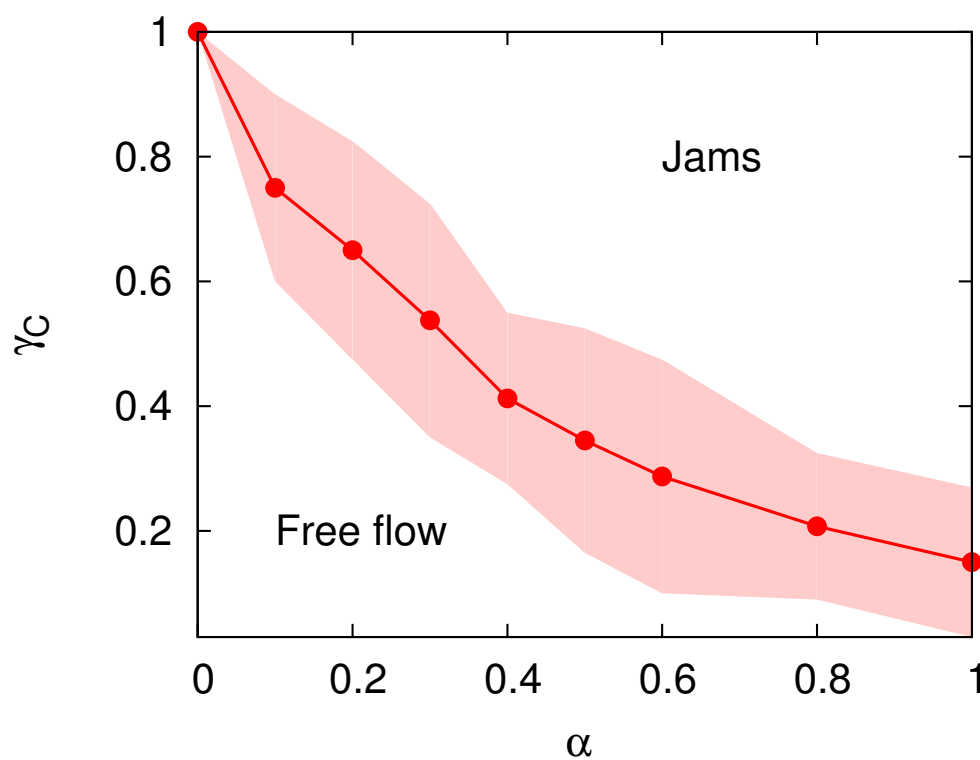


Figura 7.5: Diagrama de fases entre estados del tránsito congestionados y no congestionados en función de α y γ_C . La zona sombreada indica donde el sistema se vuelve inestable.

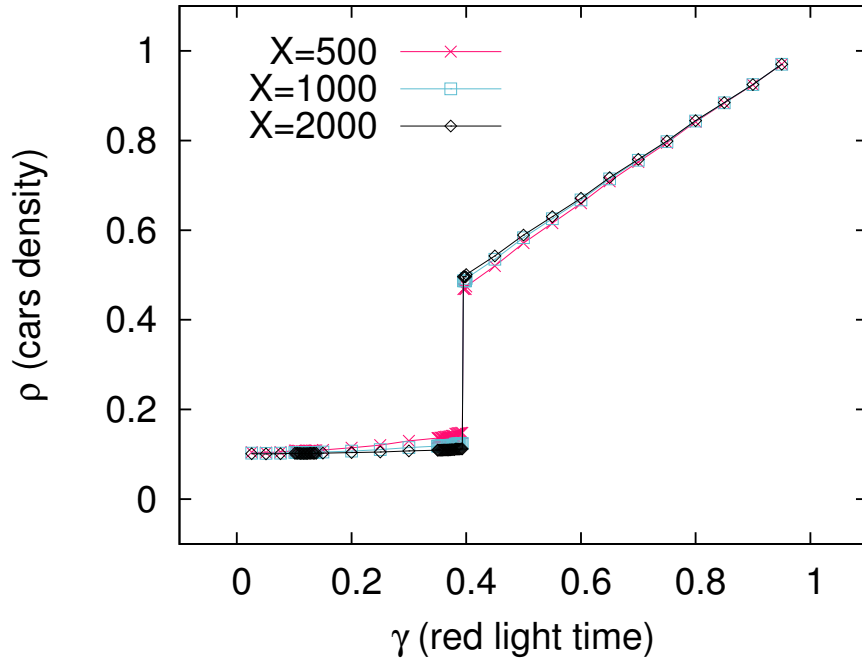


Figura 7.6: Relación ρ vs. γ para el sistema determinista. En este caso $\tau = 200$, $p = q = 0$ (determinista), $X = 500, 1000, 2000$.

si no más bien por un problema de capacidad de carga, es decir el tiempo de verde del semáforo no es suficiente para desalojar la cola formada durante el tiempo de rojo. Por otro lado, la figura 7.7 (A) muestra como cambia la transición al fijarse el parámetro q y variar p . Se observó que al disminuir p , la transición se mueve hacia valores más altos de γ , y por el contrario al aumentarlo la transición se mueve hacia valores más bajos. Algo similar ocurre cuando se fija el parámetro p y se varia q , aunque en este caso, que se muestra en el gráfico figura 7.7 (B), es un poco más abrupto, ya que para $q = 0,75$ (cercano a $q = 1$) la transición se desdibuja completamente. Por lo tanto, es una evidencia clara de que el efecto de las reglas de comportamiento produce efectos para nada triviales en todo el sistema. Cabe aclarar que en estos casos, los parámetros fijos de las simulaciones fueron $\tau = 200$, $\alpha = 1$ y $X = 500$.

En la siguiente sección se discuten estas observaciones en detalle.

7.3. Discusión

En esta sección se discuten los resultados presentados en el apartado anterior.

Respecto a la relación entre el tiempo de rojo y el valor medio de la densidad que se muestra en la figura 7.2, para $\gamma \sim 0$ la densidad alcanza un valor constante de $\rho \sim 0,07$ autos/sitio. Este valor coincide en buena medida con lo reportado por Nagel en [21] para sistemas con condiciones de contorno abiertas. De no ser por el semáforo, el sistema se mantendría en ese estado estacionario para todo tiempo, no obstante, la

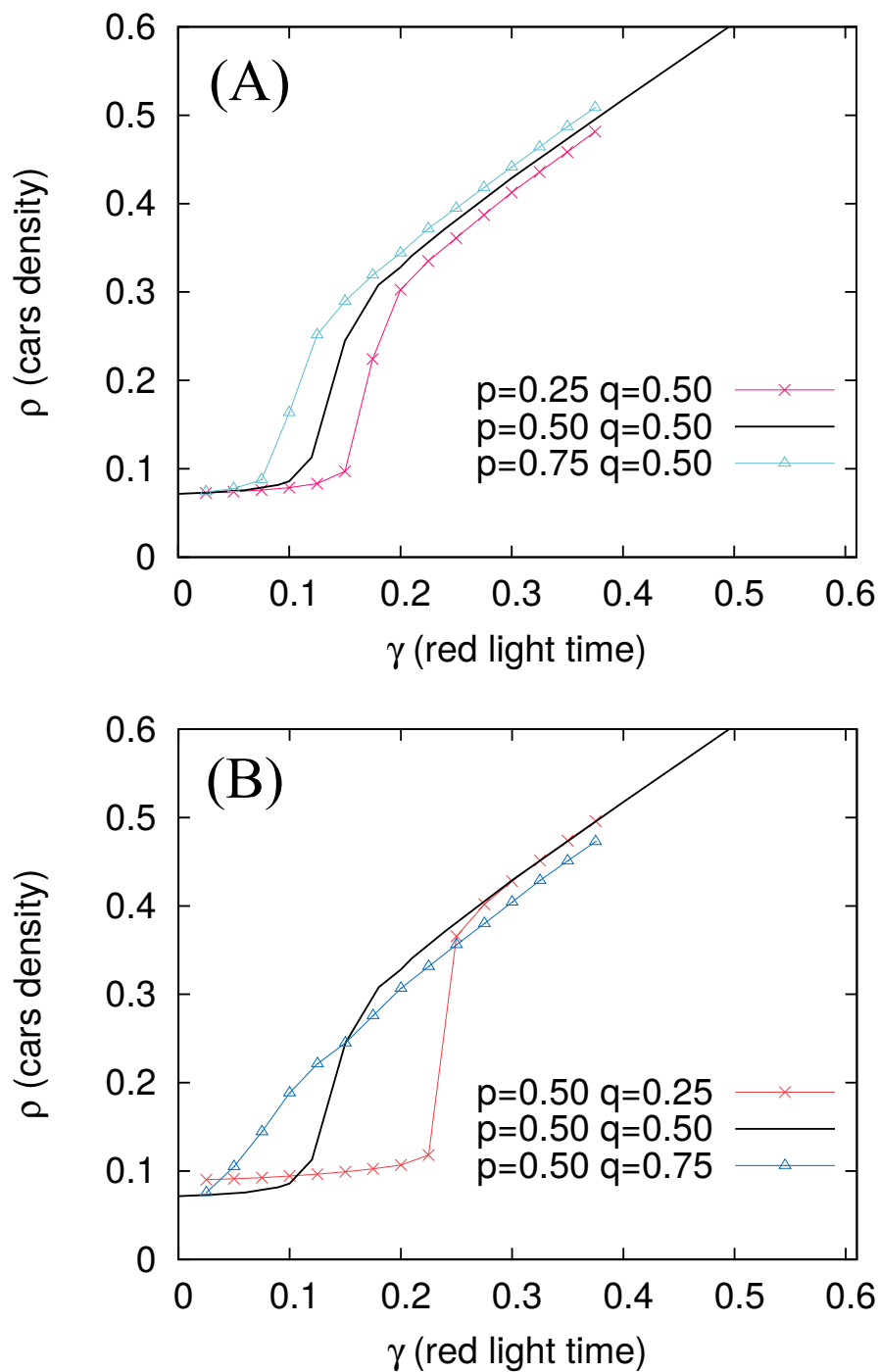


Figura 7.7: Efectos de la variación de las reglas de comportamiento p y q en la transición de fase. (A) Fijando q y variando p . (B) Fijando p y variando q . Los parámetros fijos de las simulaciones fueron $\tau = 200$, $\alpha = 1$ y $X = 500$.

presencia de éste hace que durante el tiempo de luz roja los autos se acumulen en la calle y se incremente la densidad, produciendo las inestabilidades que llevan al tránsito a cambiar de fase y a caer en un estado congestionado.

Esta densidad crítica de $\rho \sim 0,1$ autos/sitio, también reportada en [21] para el caso con condiciones de borde tipo anillo, coincide con lo observado en nuestras simulaciones donde se ve que una vez superado ese umbral la densidad crece abruptamente dando lugar a la transición de fase (ver figura 7.2). Estos indicios permiten inferir que el incremento en la densidad de autos, producto del accionar del semáforo, produce las mismas consecuencias sobre el sistema que los ejemplos reportados en la literatura.

En lo que se refiere a la relación entre ρ y γ , variando el flujo de entrada, de las curvas que se muestran en la figura 7.4 se puede decir que el corrimiento de la transición hacia valores más altos de γ tiene que ver, al igual que antes, con los tiempos de rojo necesarios para hacer que el sistema alcance la densidad crítica. Para un sistema con un flujo de entrada caracterizado por $\alpha = 0,1$, el tiempo de rojo necesario para que el sistema alcance la densidad crítica será mucho mayor que el necesario para un flujo dado por $\alpha = 1$, lo cual explica el comportamiento de las curvas. Es interesante notar que en estos casos, luego que el sistema cambia de fase, el comportamiento de la densidad se hace independiente del flujo de entrada, esto podría deberse a que en este estado, la congestión de autos llega hasta la entrada de la calle, de modo que cualquier posible incremento en la densidad producido por la entrada de autos, se vuelve despreciable respecto a la densidad total.

En relación al efecto que producen las diferentes reglas de comportamiento en la transición, cuando el sistema es determinista los tiempos del semáforo se optimizan, como se observa en la figura 7.6, a $\gamma = 0,4$ la densidad da un salto discontinuo indicando el cambio de estado en el sistema. Como ya se comentó antes, esta transición no es producto de las inestabilidades en el sistema, sino más bien es un problema de capacidad de carga, el tiempo de verde asociado al ciclo del semáforo deja de ser suficiente para evacuar la fila de autos que se forma tras el semáforo y el sistema colapsa. La ausencia de ruido en este caso, nos permite estimar el valor de γ_C como sigue.

Consideremos el valor de flujo de entrada J_{IN} como la tasa de ingreso de autos por unidad de tiempo. Entonces, bajo la hipótesis de que para el ingreso de autos el sitio de entrada debe estar vacío, tenemos:

$$J_{IN} = (1 - J_{IN})\alpha,$$

$$J_{IN} = \frac{\alpha}{1 + \alpha},$$

donde $(1 - J_{IN})$ es la fracción de tiempo en el cual la entrada a la calle esta vacía, y α , como ya se aclaró, es la probabilidad de entrada. Asimismo, el flujo de salida (a través

del semáforo) debe cumplir:

$$\langle J_{OUT} \rangle = \gamma, 0 + (1 - \gamma) \frac{v_{max}}{1 + v_{max}},$$

donde se contempla que cuando el semáforo está en rojo los autos están parados (“esperando”), y cuando está en verde, la velocidad de salida es igual a la que puede alcanzar un auto que sale de un estancamiento infinito (ver [23] sección II).

Luego, la transición se produce cuando el flujo de entrada es igual al flujo de salida, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \langle J_{IN} \rangle &= \langle J_{OUT} \rangle \\ \gamma^* &= 1 - \frac{\alpha}{1 + \alpha} \frac{1 + v_{max}}{v_{max}} \end{aligned} \quad (7.2)$$

En particular, la ecuación 7.2 para $\alpha = 1$ y $v_{max} = 5$, arroja $\gamma^* = 0,4$, que coincide con lo observado en nuestras simulaciones (figura 7.6).

En el gráfico de la figura 7.7 (A) se muestra que sucede cuando se producen cambios en el parámetro p respecto al sistema original (se recuerda que ésta regla representa la probabilidad de los conductores de mantener una distancia prudencial con su auto vecino de adelante). Si $p = 0,25$, los autos van a tender a acercarse más unos con otros. Esto produce un corrimiento del γ_C hacia valores más cercanos a la transición del sistema determinista, lo cual puede deberse a que el sistema se vuelve menos ruidoso reduciendo las inestabilidades que lo llevan a la transición. Por otro lado si $p = 0,75$, el γ_C se mueve en la dirección contraria, adelantando la transición. En este caso, esta actitud precavida hace que se tarde más tiempo en salir de los congestionamientos, ya que los autos tienden a mantener una distancia prudencial lo cual redundaría en velocidades más bajas para todo el sistema. Este fenómeno hace que se creen “semáforos virtuales” donde esta actitud precavida de los conductores, los lleva a detenerse por si mismos, lo cual hace crecer la densidad de autos en la calle para valores más bajos de γ , respecto al sistema original.

La figura 7.7 (B) muestra lo que ocurre cuando se realizan cambios en el parámetro q . Como ya se dijo, la regla de comportamiento que expresa este parámetro es la de mantener una velocidad prudente, o dicho de otra manera la de no acelerar lo máximo posible. Cuando q es bajo, los autos tienden a acelerar más e ir más rápido. En el gráfico de la figura, para $q = 0,25$ se observa que la transición se corre para valores más altos de γ , de nuevo esto puede deberse a que un q bajo redundaría en menos ruido estocástico. Por otro lado para q alto, el comportamiento prudente hace que los autos se ralenticen y la densidad de autos en la calle tienda a incrementarse independientemente

del tiempo de rojo del semáforo. Esto produce, como bien puede verse en la figura, una transición más continua de estados del tránsito en flujo libre a estados congestionados. Es necesario aclarar que llevar los parámetros p y q a valores extremos no reproduce fielmente lo observado en sistemas de tránsito reales, no obstante utilizar esta técnica nos da mayor versatilidad para entender los procesos subyacentes.

Para finalizar, cabe aclarar que el hecho de que la transición se corra hacia tiempos de rojo mayores, es un hecho significativamente importante para un sistema de más de una calle. Si se piensa en un cruce, controlado por un semáforo, el tiempo de rojo de una calle, es el tiempo de verde de la otra; es decir un sistema de dos calles que se cruzan queda acoplado por el parámetro γ del semáforo. Por lo tanto es importante encontrar formas de repartir los tiempos del ciclo para garantizar un bienestar general, lo cual como se ha observado puede lograrse disminuyendo total o parcialmente el ruido asociado al comportamiento individual de los conductores.

Hasta aquí las discusiones acerca de los resultados obtenidos. En el apartado siguiente se cierra el trabajo con unas conclusiones generales.

7.4. Conclusiones

En este trabajo se estudió el efecto de los tiempos asociados a las luces de control en el tránsito, utilizando para esto simulaciones numéricas basadas en el modelo de autómatas celulares propuesto en [23], con condiciones de borde abiertas.

Dicho sistema, en ausencia de semáforo alcanza un estado estacionario de flujo libre en el cual los autos atraviesan la calle prácticamente sin congestiones y con una densidad promedio baja y constante.

Al introducir el semáforo en el sistema, el efecto de la luz roja produce un incremento en la densidad que redundo en inestabilidades. Cuando este tiempo de rojo es lo suficientemente grande, estas inestabilidades producen una transición de fase de estados de flujo libre a estados de tránsito congestionados. Esto se manifiesta con un salto abrupto en la densidad, cuando es puesta en función del tiempo de rojo.

Se observó un efecto de tamaño finito en las curvas de ρ vs γ asociado a calles de diferente largo y se pudo realizar un análisis del comportamiento de las curvas en el entorno de la transición como función de los parámetros γ_C y del tamaño del sistema X .

Se estudió el efecto de diferentes tasas de ingreso de autos (α) a la calle, observándose un corrimiento de la transición hacia valores más altos de γ para valores de α más chicos. A partir de esto se pudo conseguir un diagrama de fases en el plano $\gamma_C - \alpha$, cuyas regiones definen estados de tránsito congestionado y no congestionado. Este resultado podría ser de utilidad en sistemas de control basados en semáforos inteligentes, ya que midiendo el flujo de autos en la entrada de la calle, se podría ajustar el γ de manera que el sistema no vaya a estados congestionados.

Por otro lado, también se estudió el efecto del comportamiento de los conductores, cuyas decisiones se reflejan en los parámetros estocásticos p y q , que representan actitudes que podríamos llamar preventivas. Para el sistema determinista, se observó un corrimiento en la transición hacia $\gamma = 0,4$, valor que pudo ser estimado postulando la idea de que el sistema determinista cambia de fase cuando el tiempo de verde asociado al ciclo del semáforo, deja de ser suficiente para evacuar la fila de autos que se forma durante la luz roja. También se vieron corrimientos en la transición cuando se mueve el parámetro p respecto de q y viceversa, pudiéndose argumentar de manera cuantitativa los fenómenos observados.

Por último, en este trabajo se planteó un sistema reducido y simple, pero que representa fielmente características urbanas muy observadas. En la ciudad de San Carlos de Bariloche, a la fecha de escritura de esta tesis, se pueden encontrar varios ejemplos de largas avenidas con semáforos cada $\sim 2km$ y también situaciones de grandes congestionamientos producto (en algunos casos) del mal funcionamiento de estos, en ejemplo concreto es la avenida Pioneros que nace en la zona céntrica de la ciudad y faldea el Cerro Otto por ocho kilómetros, con la intervención de solo dos semáforos. Por otro lado, las observaciones aquí realizadas, podría ser útiles al estudiar sistemas de tránsito más complejos, con diferentes topologías y patrones de comportamiento, que se acerquen más a las características de los sistemas de tránsito reales de las grandes ciudades, en pos de dar soporte teórico a posibles implementaciones que permitan optimizar la utilización de las luces de control en la organización del tránsito vehicular.

Bibliografía

- [1] Bettencourt, Luis, and Geoffrey West. “A unified theory of urban living.” *Nature* 467.7318 (2010): 912-913. [115](#)
- [2] World Bank Group, ed. *World Development Indicators 2012*. World Bank Publications, 2012. [115](#)
- [3] Black, William Richard. *Sustainable transportation: problems and solutions*. Guilford Press, 2010. [115](#)
- [4] Small, Kenneth. *Urban transportation economics*. Vol. 4. Taylor & Francis, 2013. [115](#)
- [5] Knox, Paul L., and Linda McCarthy. *Urbanization: An introduction to urban geography*. Boston: Pearson, 2012. [115](#)
- [6] Farahani, Reza Zanjirani, et al. “A review of urban transportation network design problems”. *European Journal of Operational Research* 229.2 (2013): 281-302. [115](#)
- [7] Weiner, Edward. *Urban transportation planning in the United States: history, policy, and practice*. Springer Science & Business Media, 2012. [115](#)
- [8] J D Murchland, (1970) Braess’s paradox of traffic flow. *Transportation Research*, 4(4), 391-394. [115](#)
- [9] Winston, Clifford, and Chad Shirley. *Alternate route: Toward efficient urban transportation*. Brookings Institution Press, 2010. [115](#)
- [10] Brockfeld, Elmar, et al. “Optimizing traffic lights in a cellular automaton model for city traffic”. *Physical Review E* 64.5 (2001): 056132. [115](#)
- [11] Palatella, Luigi, Anna Trevisan, and Sandro Rambaldi. “Nonlinear stability of traffic models and the use of Lyapunov vectors for estimating the traffic state”. *Physical Review E* 88.2 (2013): 022901.
- [12] Knospe, Wolfgang, et al. “Single-vehicle data of highway traffic: Microscopic description of traffic phases”. *Physical Review E* 65.5 (2002): 056133.

- [13] Kareem, Emad I. Abdul, and Aman Jantan. “An intelligent traffic light monitor system using an adaptive associative memory”. *IJIPM: International Journal of Information Processing and Management* 2.2 (2011): 23-39.
- [14] Tubaishat, Malik, Yi Shang, and Hongchi Shi. “Adaptive traffic light control with wireless sensor networks”. *Proceedings of IEEE consumer communications and networking conference*. 2007.
- [15] Omachi, Masako, and Shinichiro Omachi. “Traffic light detection with color and edge information”. *Computer Science and Information Technology, 2009. ICCSIT 2009. 2nd IEEE International Conference on*. IEEE, 2009.
- [16] Chavan, Shilpa S., R. S. Deshpande, and J. G. Rana. “Design of intelligent traffic light controller using embedded system”. *2009 Second International Conference on Emerging Trends in Engineering & Technology*. IEEE, 2009. [115](#)
- [17] Kerner, B. S., S. L. Klenov, and P. Konhäuser. “Asymptotic theory of traffic jams”. *Physical Review E* 56.4 (1997): 4200. [116](#)
- [18] Boris S. Kerner, (1998) “Experimental Features of Self-Organization in Traffic Flow”, *Physical Review Letters*, 81, 3797–3400.
- [19] Boris S. Kerner, (2012) *The Physics of Traffic: Empirical Freeway Pattern Features, Engineering Applications, and Theory*. Springer, ISBN: 3540409866, 9783540409861.
- [20] Nagatani, Takashi. “Density waves in traffic flow”. *Physical Review E* 61.4 (2000): 3564. [116](#)
- [21] K Nagel, M Schreckenberg, (1992) A cellular automaton model for freeway traffic. *Journal de physique I*, 2(12), 2221-2229. [116](#), [117](#), [122](#), [124](#)
- [22] K. Nagel, (1994) Life times of simulated traffic jams, *Int. J. Mod. Phys. C*, 05, 567.
- [23] K. Nagel, M. Paczuski, (1995) “Emergent Traffic Jams”. *Physical Review E*. 51 (4): 2909–2918. [116](#), [125](#), [126](#)
- [24] Cheybani, S., J. Kertesz, and M. Schreckenberg. “Nondeterministic Nagel-Schreckenberg traffic model with open boundary conditions”. *Physical Review E* 63.1 (2000): 016108.
- [25] Jia, Ning, and Shoufeng Ma. “Traffic-light boundary in the deterministic Nagel-Schreckenberg model”. *Physical review E* 83.6 (2011): 061150. [116](#)

-
- [26] Echenique, P., Gómez-Gardenes, J., & Moreno, Y. (2005). Dynamics of jamming transitions in complex networks. *EPL (Europhysics Letters)*, 71(2), 325. [119](#)

Capítulo 8

Conclusiones generales y perspectivas a futuro

En este trabajo encaramos la caracterización de las propiedades emergentes de distintos sistemas complejos que son originados a partir de interacciones sociales y de la diversidad del comportamiento humano. Utilizamos para esto un enfoque interdisciplinario donde confluyen la física estadística, la matemática aplicada y aspectos fundamentales de la sociología y de la psicología del comportamiento.

Este camino iniciado hace algunos años, comenzó con el modelado de un proceso de imitación - influencia de agentes, guiados por pequeños grupos cercanos (locales) que son tomados como referencia de debate y que sirven como núcleos de propagación de actitudes sociales concretas: el consenso y su antítesis el disenso. En este trabajo, desarrollado en el primer capítulo, proponemos una dinámica de reglas simples en redes regulares (tipo cadena lineal en un caso y red cuadrada en otro) que llevan al sistema a alcanzar estados absorbentes que asociamos con situaciones sociales bien definidas como lo son el estado de consenso total o el estado de disenso general (o polarización). Además observamos interesantes propiedades desde el punto de vista de la mecánica estadística, como leyes de escala y exponentes críticos no triviales. Este trabajo debe ser tomado como una etapa de exploración inicial y más que nada como un punto de partida para futuros estudios sobre redes complejas, las cuales representan en mejor medida las conexiones sociales observadas en redes reales.

En el segundo capítulo de esta tesis contamos la realización de un experimento social que nos permitió obtener evidencia empírica de los mecanismos que subyacen la influencia social y las dinámicas de opinión. De este experimento, que realizamos sobre un conjunto de estudiantes de física e ingeniería de la Universidad Nacional de San Luis y del Instituto Balseiro, destacamos dos observaciones.

(I) Existe una importante correlación entre la diferencia de confianza de dos personas que tras emitir su opinión opinan deciden o no cambiarla; y

(II) Esta diferencia de confianza es en si más relevante que la cercanía (en términos de similaridad) de las respuestas dadas por las dos personas o incluso de las respuestas reales. Dicho de otra manera no se encontró ninguna correlación entre el cambio de opinión y las opiniones en si.

Por un lado es interesante que la primera observación esta en acuerdo con la concepción de verdad relativa de algunas corrientes filosóficas, que expresan que en un debate quien se hace dueño de la verdad es quien mejor expresa su confianza acerca de la veracidad de la misma. Y por otro lado, es importante remarcar que la observación (II) podría estar relacionado con la objetividad de las preguntas del experimento, es decir, no podríamos asegurar que el resultado seria el mismo si consideráramos preguntas subjetivas. La posibilidad de hacer un experimento de este tipo basado en preguntas subjetivas, es algo que hemos planteado para una investigación a futuro.

La importancia del concepto de confianza, observada en el contexto del capítulo dos, nos motivo a indagar acerca de la posible relevancia de este concepto en otros tipos de procesos sociales. En el cuarto capítulo, presentamos una variación del juego conocido como “la batalla de los sexos” donde planteamos que el concepto de confianza (en este caso auto confianza) puede ser utilizado para modelar una elección de estrategia que no se basa en un proceso puramente racional si no más bien que se rige inconscientemente por un parámetro que depende históricamente de la interacción de los agentes con el medio (sociedad). Esta idea nos llevo a plantear un juego de dinámica no monótona en *payoff*, del cual pudimos extraer interesantes propiedades estadísticas y leyes de escala bien definidas en redes totalmente conectadas. Asimismo, pudimos definir las ecuaciones aproximadas de la dinámica y combinando técnicas analíticas con numéricas, describirla en términos de sus puntos fijos.

Siguiendo con el foco puesto en la diversidad de comportamiento, el quinto capítulo esta dedicado al estudio de un sistema de transito y en particular al efecto de los tiempos característicos de un semáforo en una calle con condiciones de contorno abiertas. En el sistema propuesto, el comportamiento de los individuos esta modelado por dos parámetros estocásticos; en ausencia de semáforo este sistema se estabiliza en un flujo libre, de una manera similar a lo que se observa en las autopistas de las grandes ciudades. No obstante la presencia de un semáforo, perturba al sistema incrementando la densidad de autos lo cual manifiesta con grandes inestabilidades, producto de la interacción entre los autos, guiada por los parámetros estocásticos que modelan el comportamiento de los conductores. Esto redundo en una transición de fase de estados de flujo libre a estados congestionados, la cual caracterizamos definiendo como parámetro de control al tiempo de rojo del semáforo. Observamos también el efecto que produce la variación del flujo de autos en la entrada de la calle, pudiendo definir a partir de esto un diagrama fases que podría ser utilizado como una base teórica para la implementación tecnológica de luces de control inteligentes. Por otro lado, pesamos

que este trabajo abre la posibilidad de estudiar topologías más complicadas, como la colocación de varios semáforos, cruces de calles más complejos, o la posibilidad de estudiar lo que se conoce como “onda verde” del semáforo.

En el último capítulo de la tesis encaramos un problema de propagación difusiva en redes complejas. Nos interesamos en particular por estudiar un sistema que propaga información pero con probabilidad de cometer errores. Observamos que estos mismos producen una pérdida de información que puede a la vez aumentar o disminuir según la topología de red utilizada. Pudimos, a partir de un estudio minucioso de distintos parámetros del sistema, entender donde, como y en que instancia del proceso difusivo se pierde información; observamos también un fenómeno emergente en el cual la topología de red lleva al sistema a una pérdida de información total. Un fenómeno interesante que fue observado en este sistema, en particular en las redes libre de escala, es la centralización de la información global en algunos pocos nodos de la red, en un contexto social esto representa un desequilibrio interesante que merece la pena ser estudiado en más profundidad. Por otro lado, este modelo, con algunas modificaciones leves, puede ser utilizado para estudio de propagación de consenso, y conectarlo con lo discutido en los primeros capítulos. Este trabajo está en curso.

Por lo dicho en líneas anteriores, y para finalizar, los objetivos propuesto para la realización de esta tesis fueron cumplidos ampliamente, además la generación de este conocimiento permite la continuidad de estas líneas de investigación y da lugar a la apertura de nuevas líneas en el área de los sistemas complejos.

Agradecimientos

